جزوه ی مبانی هوش محاسباتی

Basics of Computational Intelligence

نیم سال تحصیلی ۹۶۱

نام و نام خانوادگی استاد: دکتر حمیدرضا افتخاری

نام و نام خانوادگی دانشجو: حسین عبدلی

سرفصل‌ها:

۱- منطق فازی

۲- یادگیری ماشین

۳- شبکه‌های عصبی

۴- الگوریتم‌های تکاملی (ژنتیک الگوریتم)

در شبکه‌های عصبی و الگوریتم ژنتیک به جواب بهینه (خوب) می‌رسیم، اما الزاماً بهترین جواب را نمی‌دهد.

۵- هوش ازدحامی (الگوریتم کلونی مورچه‌ها): از هوش‌های کم اســـتفاده می‌کنیم و آن‌ها را به صـــورت تجمیع در نظر می‌گیریم و مسئله را حل می‌کنیم.

مراجع:

۱) کتاب First Course on Fuzzy Theory and Applications, by Lee, Kwang Hyung

۲) کتاب Fuzzy Logic with Engineering Applications, Third Edition, by Timothy J. Ross

۳) کتاب Computational Intelligence: An Introduction, Second Edition, by Andries P.Engelbrecht

امتحان و ارزیابی:

۱- میان‌ترم: ۸ نمره

۲- پایان ترم: ۸ نمره

۳- کوئیز از مطالب یک یا دو جلسه قبل: ۲ نمره

۴- رعایت شئونات کلاس: ۲ نمره (اگر تعداد غیبت‌ها ۵ جلسه شود، از این ۲ نمره کم می‌شود. اگر تعداد غیبت‌ها ۶ جلسه شود، درس مربوطه حذف می‌شود)

۵- ارائه: ۲+ نمره‌ی اضافی دارد.

۶- جزوه: ۲+ نمره‌ی اضافی دارد.

ایمیل استاد: Email : hreftekhari@gmail.com

عنوان ایمیل: Title : CI-961

آدرس کانال تلگرامی: https://t.me/malayerce

آدرس کانال سروش: https://sapp.ir/malayerce

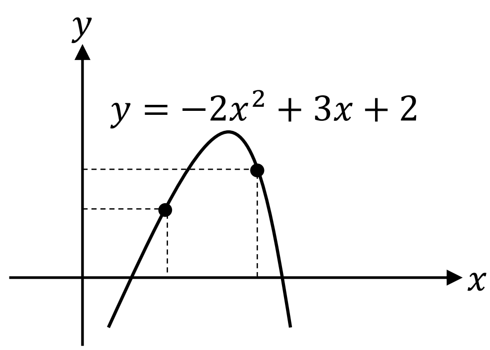
تعریف هوش مصنوعی:

شبیه‌سازی هوش انسان در ماشین به طوری که مثل انسان فکر کند (درست تصمیم بگیرد) و مثل انسان عمل کند (درست عمل کند).

تعریف محاسبات سخت (Hard Computing):

محاسبات خشک و مبتنی بر معادلات دقیق ریاضیات، «محاسبات سخت» نامیده می‌شوند.

مثال: پیداکردن yها با دادن xها در چندجمله‌ای $y = -2x^2 + 3x + 2$ یک محاسبه‌ی سخت محسوب می‌شود.



تعریف محاسبات نرم (Soft Computing):

روش‌هایی وجود دارند که می‌توانند رفتار پیچیده‌ترین و مغشوش‌ترین پدیده‌ها را نیز با دقت بالایی (نه به صورت ۱۰۰ ٪ دقیق) مدل‌سازی نمایند. این محاسبات تحت عنوان «محاسبات نرم» شناخته می‌شوند.

محاسبات نرم مبتنی بر استنتاج ذهن انسان، شبیه‌سازی عملکرد نرون‌های مغز، شبیه‌سازی رفتار پدیده‌های اجتماعی طبیعت (الگوریتم‌های تکاملی مثل ژنتیک، فاخته، کلونی مورچه و ...) است. سیستم‌های فازی، شبکه‌های عصبی مصنوعی و الگوریتم‌های تکاملی از مهم‌ترین شاخه‌های محاسبات نرم محسوب می‌شوند.

مثال: یک راننده‌ی ماهر جرثقیل هوایی، جهت کنترل نوسانِ بار، هرگز در ذهنش یک معادله‌ی درجه ۵ را به کار نمی‌گیرد. او با استفاده از یک سیستم استنتاج فازی ذهنی (تعدادی اگر-آن‌گاه)، به خوبی این سیستم پیچیده را با استفاده از تجربیاتش کنترل می‌نماید. در واقع می‌توان این تجربیات فرد متخصص را به صورت قوانین فازی درآورد و به سیستم کنترل سپرد.

محاسبات نرم و هوش محاسباتی

محاسبات نرم شامل اجزائی همچون؛ منطق فازی، شبکه‌های عصبی و الگوریتم‌های ژنتیک می‌باشد که ممکن است در جاهای مختلف با آن برخورد کرده باشید. این اجزاء را در قالب دیگری هم با نام هوش محاسباتی می‌شنوید. این‌ها از یک دیدگاه خیلی به هم شبیه هستند. هوش محاسباتی و محاسبات نرم، هر دو از یک سری اجزاء تشکیل شده‌اند. به عبارت دیگر، هر دو این‌ها منطق فازی، یادگیری تقویتی (Reinforcement Learning)، شبکه‌های عصبی، الگوریتم‌های ژنتیک و روش کلونی مورچه‌ها را شامل می‌شوند. اما در محاسبات نرم تأکید خاصی در ترکیب این روش‌ها وجود دارد.

نکته: برای حل مسائل دقیق، معمولاً از یک مبنای ریاضی استفاده می‌شود و برای حل مسائل مربوط به هوش مصنوعی، داده‌کاوی و سیستم‌های کنترل هوشمند و ... از محاسبات نرم استفاده می‌شود.

مثال: مسائل Polynomial دقیق‌اند و به صورت محاسبات دقیق (محاسبات سخت) حل می‌شوند. پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای و غیر چندجمله‌ای را در نظر بگیرید:

$$P \rightarrow Polynomial\ (\text{چندجمله‌ای}) \rightarrow \begin{cases} O(n) \\ O(n^2) \\ O(n\log n) \end{cases}$$

$$NP \rightarrow Nonpolynomial\ (\text{غیر چندجمله‌ای}) \rightarrow O(2^n)$$

بالاخره در یک nای اتفاق می‌افتد. ($2^n > n^{100}$)

نکته: مسئله‌ی TSP (فروشنده‌ی دوره‌گرد) به صورت NP است.

منطق فازی (Fuzzy Logic) در مقابل منطق بولی (Boolean Logic):

حتماً بارها شنیده‌اید که کامپیوتر از یک منطق صفر و یک تبعیت می‌کند. در چارچوب این منطق، چیزها یا درستند یا نادرست، وجود دارند یا ندارند. در مقابلِ منطق بولی، منطق فازی وجود دارد. منطقی که دنیا را نه به صورت حقایق صفر و یکی، بلکه به صورت طیفی خاکستری از واقعیت‌ها می‌بیند و در هوش مصنوعی کاربرد فراوانی یافته است. واژه‌ی فازی (Fuzzy) به معنای غیردقیق، ناواضح و مبهم (شناور) است.

کاربرد منطق فازی در علوم نرم‌افزاری را می‌توان به طور ساده این‌گونه تعریف کرد: «منطق فازی از منطق ارزش‌های "صفر و یک" نرم‌افزارهای کلاسیک فراتر رفته و درگاهی جدید برای دنیای علوم نرم‌افزاری و رایانه‌ها می‌گشاید، زیرا فضای شناور و نامحدود بین اعداد صفر و یک را نیز در منطق و استدلال‌های خود به کار برده و به چالش می‌کشد.»

منطق فازی از فضای بین دو ارزش «برویم» یا «نرویم»، ارزش‌های جدید «شاید برویم» یا «می‌رویم اگر» یا حتی «احتمال دارد برویم» را استخراج کرده و به کار می‌گیرد. بدین ترتیب به عنوان مثال: مدیر بانک پس از بررسی رایانه‌ای بیلان اقتصادی یک بازرگان، می‌تواند فراتر از منطق «وام می‌دهیم» یا «وام نمی‌دهیم» رفته و بگوید: «وام می‌دهیم اگر...» یا «وام نمی‌دهیم ولی...».

منطق فازی اولین‌بار در پی تنظیم نظریه‌ی مجموعه‌های فازی به وسیله‌ی پروفسور لطفی‌زاده -که در جوامع علمی به Lotfi A. Zadeh (لطفی ع.زاده) معروف است- در سال ۱۹۶۵ میلادی مطرح شد. نام کامل پرفسور لطفی‌زاده، "لطفعلی رحیم‌اوغلو عسکرزاده" است.[۱]

مقدمه‌ای بر نظریه‌های فازی و احتمال (Introduction to Fuzzy and Probability Theory)

عدم اطمینان (عدم قطعیت):
- ۱- عدم اطمینان (عدم قطعیت) تصادفی (*Random uncertainly*)
- ۲- عدم اطمینان (عدم قطعیت) غیرتصادفی (*Non-Random uncertainly*)

---

[۱]. گاهی از او با نام «زاده» نیز نام برده می‌شود و برخی از قوانین منطق فازی به پیروی از آداب تاریخی علم ریاضیات، با کلمه‌ی Zadeh نامگذاری شده‌اند.

عدم قطعیت تصادفی (*Random uncertainly*):

یک عدم قطعیتی در بعضی گزاره‌ها وجود دارد که حاکی از تصادفی‌بودن آن می‌باشد. مثلاً: «شاید کلاس تشکیل شود.» که مفهوم آن به صورت «احتمالاً کلاس تشکیل می‌شود یا نمی‌شود.» است که حاکی از عدم وجود اطلاعات مناسب در مورد تشکیل‌شدن یا نشدن کلاس می‌باشد و "نظریه‌ی احتمال" را مطرح می‌کند.

نظریه‌ی احتمال برای پیش‌بینی نتیجه‌ی یک رویداد در آینده به کار می‌رود. رویدادی که در آینده قرار است اتفاق بیافتد و نتیجه‌ی آن در حال حاضر مشخص نیست. در واقع، نظریه‌ی احتمال به رویدادهای تصادفی مرتبط می‌باشد.

در نظریه‌ی احتمال باید به گذشته استناد کرده و بر اساس آن تصمیم‌گیری نمود. مثلاً: اگر بگوییم: «احتمال تشکیل کلاس در هفته‌ی آینده ۸۰٪ است»، بنابراین «احتمال عدم تشکیل کلاس در هفته‌ی آینده ۲۰٪ است». این درصدها با استفاده از استنتاج آماری بدست می‌آیند. مجموع احتمال انجام و عدم انجام یک عمل همیشه برابر با ۱ خواهد بود.

عدم قطعیت غیرتصادفی (*Non-Random uncertainly*):

یک عدم قطعیتی دیگری نیز در برخی گزاره‌ها وجود دارد که حاکی از تصادفی‌بودن آن نمی‌باشد. مثلاً: امکان این‌که یک نفر در صبح‌گاه به سینما برود، وجود دارد و امکان آن زیاد است، امام احتمال آن خیلی کم است.

"نظریه‌ی فازی" برای بیان و تشریح عدم قطعیت و عدم دقت در رویدادها به کار می‌رود و کلید اصلی نظریه‌ی فازی از منطق چند ارزشی به وجود آمده است. نظریه‌ی فازی عدم قطعیت غیراحتمالی را پشتیبانی می‌کند. عدم قطعیت غیرتصادفی توسط نظریه‌ی احتمال قابل بیان نیست و حاصل وابستگی به آن شئ (تعلق به یک مجموعه) است.

ایده‌ی نظریه‌ی مجموعه‌های فازی برای اولین‌بار توسط پروفسور لطفی‌زاده با این عبارت ایجاد شد: «ما نیاز به یک نوع مختلف از ریاضیات داریم تا بتوانیم ابهامات و عدم دقت رویدادها را مدل‌سازی نماییم، مدلی که متفاوت از نظریه‌ی احتمالات می‌باشد.»

در نظریه‌ی فازی یا "نظریه‌ی امکان" مجموع امکان انجام و عدم انجام یک عمل، می‌تواند بیشتر از ۱ باشد. مثلاً: امکان انجام یک عمل ۸۰٪ و عدم امکان آن ۴۰٪ باشدکه مجموع آن بیشتر از ۱ می‌باشد.

مثال: اگر گفته شود که یک لیوان آب ۸۰٪ احتمال مسمومیت دارد و ۲۰٪ احتمال سالم‌بودن دارد، پس ممکن است آب لیوان کاملاً سالم، یا کاملاً مسموم، و یا درصدی سالم و درصدی مسموم باشد، اما اگر گفته شود که ۲۰ ٪ آب لیوان مسموم است؛ یعنی حتماً آب لیوان مسموم است و از وجود ماده‌ی سمی در آب اطمینان داریم (به تعلق‌داشتنِ به یک مجموعه شک نداریم، بلکه به درصد آن شک داریم).

نکته: امکان وقوع یک مسأله همیشه بیشتر از احتمال آن است: $Probability < Belief$

نکته: احتمال، وقوع یک حادثه است و امکان، وقوع یک شئ است و الزاماً برابر با احتمال آن نیست.

نکته: نظریه‌ی احتمال به استنتاج آماری و نظریه‌ی فازی (نظریه‌ی امکان) به وضعیت موجود برمی‌گردد.

مثال: احتمالاً فردا هوا کمی بارانی است.

تصادفی　　　　منطق فازی

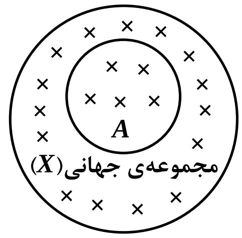
منطق فازی

بیان ریاضی منطق فازی

نمایش مجموعه‌های کلاسیک یا تُرد (Crisp):

$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

$A = \{x \in X \mid x \text{ خواص}\}$



نمایش مجموعه‌های فازی: مجموعه‌های فازی از تعمیم نظریه‌ی کلاسیک مجموعه‌ها حاصل می‌آید که در منطق فازی کاربرد دارد.

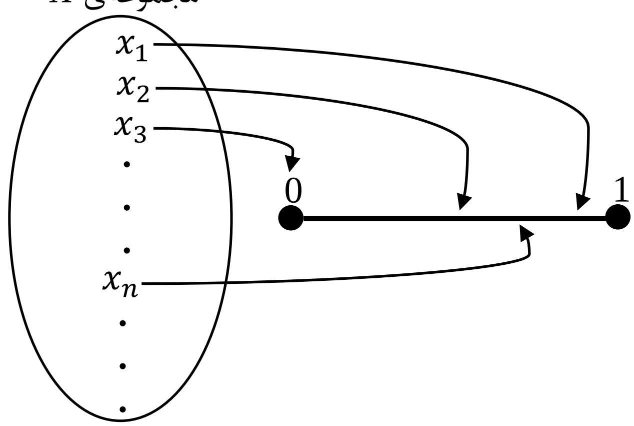
$\mu_{\tilde{A}}(x) :$ $\tilde{A}$ به مجموعه‌ی x میزان تعلق → (بین صفر و یک می‌باشد)

$\mu_{\tilde{A}}(x): X \longrightarrow [0,1]$ (تابع عضویت یا تابع مشخصه)

$$\left(\text{تابع عضویت یا درجه عضویت}\right) \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ عضو } \tilde{A} \text{ است} \\ 0 & x \text{ عضو } \tilde{A} \text{ نیست} \end{cases}$$

$\tilde{A} = A^* = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X \}$

نکته: x می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد.



نمایش شماتیک تصویر اعضای مجموعه‌ی فازی به درجه‌های عضویت در بازه‌ی صفر و یک

نکته: مجموعه‌های فازی را می‌توان به صورت نمادهای زیر نیز نشان داد. نمادهای $\sum$ و $\int$ نمادهای سیگما و انتگرال نیستند، بلکه به ترتیب نمادهایی برای نشان‌دادن مجموعه‌های فازی گسسته و پیوسته می‌باشند.

$$\left(\text{مجموعه‌ی فازی گسسته}\right) \sum_{i \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x_i}$$

$\left(\text{مجموعه‌ی فازی پیوسته}\right) \int \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$

مثال: اگر $A = \{1,2,3,4,5\}$ باشد، آن‌گاه داریم:

$\tilde{A} = A^* = \{(1,1)\,,(2,1)\,,(3,1)\,,(4,1)\,,(5,1)\}$

یا

$\tilde{A} = A^* = \{(1,1)\,,(2,1)\,,(3,1)\,,(4,1)\,,(5,1)\,,(6,0)\,,(7,0),\dots\}$

مثال: فرض می‌کنیم مجموعه‌ی جهانی X مجموعه‌ای از اندازه‌ی قد انسـان‌ها و $\tilde{A}$ مجموعه‌ی افراد قدبلند باشد. در این مثال، فضا گسسته می‌باشد.

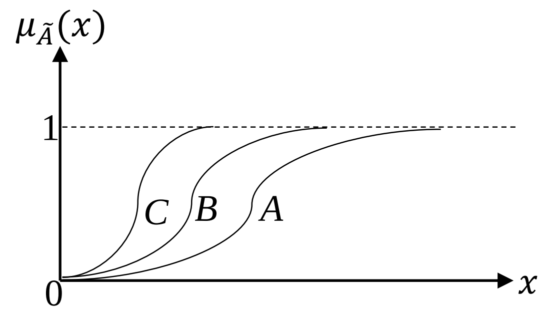
$X = \{120\,,140\,,160\,,180\,,200\,,220\}$

$\tilde{A} = \{(120\,,0)\,,(140\,,0.1)\,,(160\,,0.4)\,,(180\,,0.8)\,,(200\,,1)\,,(220\,,1)\}$

اعداد مربوط به «تعلق عدد به مجموعه» با استفاده از این روش‌ها بدست می‌آیند:

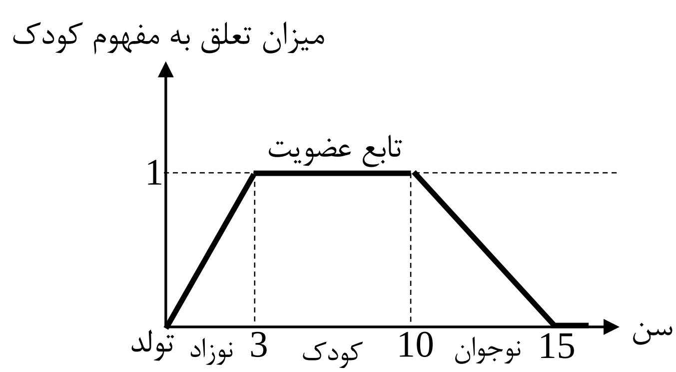
۱- دانش خبرگانی: یک فرد یا گروهی از افراد تصمیم می‌گیرند که چه اعدادی را قرار دهند.
۲- بحث ریاضی: بازه‌ی بین اعداد یک مجموعه را با روش‌های ریاضی تقسیم کنیم.
۳- هوش مصنوعی: با استفاده از یک‌سری از نرم‌افزارها این کار انجام شود.

نکته: توابع عضویت نهایتاً به عدد ۱ ختم می‌شوند، منتها بعضی توابع زودتر و بعضی دیرتر به عدد ۱ می‌رسند.



مثال: تابع عضویت برای میزان تعلق به مفهوم کودک را با رسم شکل نشان داده و بنویسید. در این مثال، فضا پیوسته می‌باشد.

جواب: مثال درباره‌ی سـن فرد خردسال می‌باشد. قرارداد می‌کنیم که از تولد تا ۳ سالگی نوزاد، از ۳ تا ۱۰ سالگی کودک و از ۱۰ تا ۱۵ سالگی نوجوان محسوب شوند. طبق این بازه‌بندی، نمودار زیر بدست می‌آید.

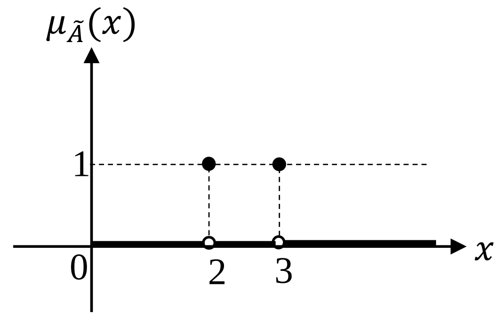


$\tilde{A} = \{\,\left(x,\mu_{\tilde{A}}(x)\right)\}$

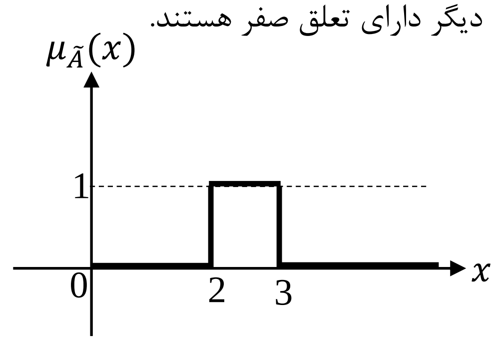
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & x \le 3 \\ 1 & 3 < x \le 10 \\ -\frac{1}{5}x + 3 & 10 < x \le 15 \\ 0 & x > 15 \end{cases}$$

مثال: اگر مجموعه‌ی جهانی $U = \{1,2,3,4\}$ باشـــد و مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{(1\ ,0.5)\ ,(2\ ,0.2)\}$ باشـــد، می‌توانیم مجموعه‌ی فازی را به صورت $\tilde{A} = \{\frac{0.5}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}\}$ نیز نشان دهیم.

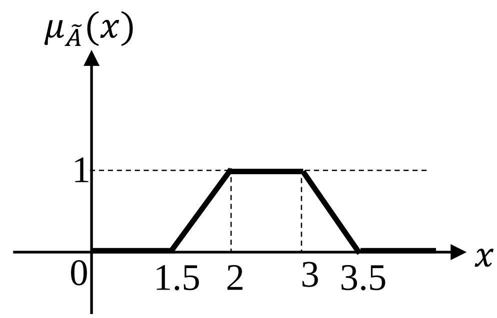
نکته: مجموعه‌ی $A = \{2,3\}$ یک مجموعه‌ی عادی است که فقط اعداد ۲ و ۳ دارای تعلق یک می‌باشند و اعداد دیگر دارای تعلق صفر هستند.



نکته: مجموعه‌ی $A = \{[2,3]\}$ یک مجموعه‌ی بازه‌ای (Interval) اســـت که هر عددی در بازه‌ی [2,3] به مجموعه تعلق داشته و دارای تعلق یک می‌باشد و اعداد دیگر دارای تعلق صفر هستند.



نکته: شکل زیر یک مجموعه‌ی فازی است، زیرا همه‌ی مقادیر نسبی را شامل شده و دارای تعلق نسبی در بازه‌های [1.5,2] و [3,3.5] می‌باشد.



نکته: مجموعه‌های بازه‌ای تقریباً شـــامل همه‌ی قواعد مجموعه‌های فازی می‌باشـــند. به عبارت دیگر، مجموعه‌های فازی حالت عمومی‌تری دارند و مجموعه‌های بازه‌ای حالت خاصی از مجموعه‌های فازی هستند.

نکته: اگر تعلق‌های یک مجموعه‌ی فازی، مقادیر فازی داشته باشد، به آن مجموعه‌ی فازی سطح-۲ (Level 2) یا مجموعه‌ی فازی نوع-۲ (Type 2) می‌گویند؛ به عبارتی دیگر، یک مجموعه‌ی فازی نوع-۲ یا مجموعه‌ی فازی- فازی، یک مجموعه‌ی فازی است که دارای درجه عضویت‌های فازی می‌باشد.

عملیات در مجموعه‌های کلاسیک و فازی

تعاریف و عملیات مختلف در مجموعه‌های کلاسیک و فازی در زیر آمده است (X را مجموعه‌ی جهانی در نظر می‌گیریم):

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A , x \in X\} \quad , \quad \bar{\tilde{A}} = \{x \mid \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \;\; or \;\; x \in B\} \quad , \quad \tilde{A} \cup \tilde{B} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max[(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\; and \;\; x \in B\} \quad , \quad \tilde{A} \cap \tilde{B} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min[(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \;\; and \;\; x \notin B\} \quad , \quad \tilde{A} - \tilde{B} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \min[(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)] \}$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}\cap\bar{\tilde{B}}}(x) = \min[(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)] \}$$

$$A \subseteq B = \{x \mid if \;\; x \in A \;\; then \;\; x \in B\} \quad , \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{B} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

$$if\,(A \subseteq B \;\; and \;\; B \subseteq A) \Longrightarrow A = B \quad , \quad \tilde{A} = \tilde{B} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \;\; and \;\; \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x)\}$$

$$\tilde{A} = \tilde{B} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

مثال: اگر مجموعـه‌ی جهانی $X = \{1,2,3,4\}$ ، و مجموعه‌های کلاســیک $C = \{1,2\}$ و $D = \{2,3\}$ ، و مجموعه‌های فازی $\tilde{A} = \{\frac{0.2}{1} , \frac{0.7}{2}\}$ و $\tilde{B} = \{\frac{0.5}{2} , \frac{1}{3}\}$ و $\tilde{E} = \{\frac{0.3}{1} , \frac{0.8}{2}, \frac{0.2}{3}\}$ و $\tilde{F} = \{\frac{0.1}{1} , \frac{0.9}{2}, \frac{1}{4}\}$ باشند، آن‌گاه با توجه به تعاریف و عملیات فوق داریم:

$$\bar{C} = \{3,4\}$$

$$\bar{D} = \{1,4\}$$

$$C \cup D = \{1,2,3\}$$

$$C \cap D = \{2\}$$

$$C - D = \{1\}$$

$$\bar{\tilde{A}} = \{\frac{0.8}{1} , \frac{0.3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$$

$$\bar{\tilde{B}} = \{\frac{1}{1} , \frac{0.5}{2}, \frac{1}{4}\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{\frac{0.2}{1} , \frac{0.7}{2}, \frac{1}{3}\}$$

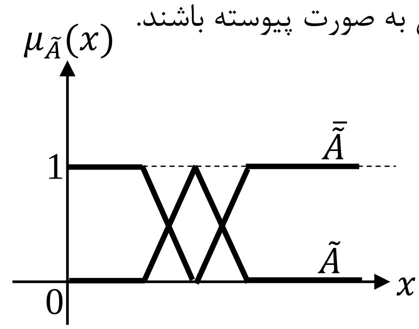
$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{\frac{0.5}{2}\}$$

$$\tilde{A}-\tilde{B}=\tilde{A}\cap\bar{\tilde{B}}=\{\frac{0.2}{1},\frac{0.5}{2}\}$$

$\tilde{A}\subseteq\tilde{E}$ (صحیح است)

$\tilde{A}\subseteq\tilde{F}$ (غلط است)

مثال: رسم مجموعه‌های فازی A و $\tilde{A}$ وقتی به صورت پیوسته باشند.



خواص مجموعه‌های کلاسیک و فازی

۱- خاصیت مکملِ مکمل:

$\bar{\bar{A}}=A \quad , \quad \bar{\bar{\tilde{A}}}=\tilde{A}$ (برقرار است)

$$\bar{\bar{\tilde{A}}}=\{x \mid \mu_{\bar{\bar{\tilde{A}}}}(x)=1-\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)=1-\left(1-\mu_{\tilde{A}}(x)\right)=\mu_{\tilde{A}}(x)\}=A$$

۲- خاصیت جابجایی اجتماع:

$A\cup B=B\cup A \quad , \quad \tilde{A}\cup\tilde{B}=\tilde{B}\cup\tilde{A}$ (برقرار است)

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\max[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)]=\max[\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{A}}(x)]=\mu_{\tilde{B}\cup\tilde{A}}(x)\}=\tilde{B}\cup\tilde{A}$$

۳- خاصیت جابجایی اشتراک:

$A\cap B=B\cap A \quad , \quad \tilde{A}\cap\tilde{B}=\tilde{B}\cap\tilde{A}$ (برقرار است)

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\min[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)]=\min[\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{A}}(x)]=\mu_{\tilde{B}\cap\tilde{A}}(x)\}=\tilde{B}\cap\tilde{A}$$

۴- خاصیت شرکت‌پذیری اجتماع:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \quad , \quad \tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C})=(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}$ (برقرار است)

$$\begin{aligned}\tilde{A}\cup\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)&=\{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C})}(x)=\max\left[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{(\tilde{B}\cup\tilde{C})}(x)\right]\\&=\max[\mu_{\tilde{A}}(x),\max[\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)]]=\max[\max[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)],\mu_{\tilde{C}}(x)]\\&=\max[\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)\}=\mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}}(x)\}=(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}\end{aligned}$$

۵- خاصیت شرکت‌پذیری اشتراک:

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \quad , \quad \tilde{A}\cap(\tilde{B}\cap\tilde{C})=(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}$ (برقرار است)

$$\begin{aligned}\tilde{A}\cap\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)&=\{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cap\tilde{C})}(x)=\min\left[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{(\tilde{B}\cap\tilde{C})}(x)\right]\\&=\min[\mu_{\tilde{A}}(x),\min[\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)]]=\min[\min[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)],\mu_{\tilde{C}}(x)]\\&=\min[\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)\}=\mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}}(x)\}=(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}\end{aligned}$$

۶- خاصیت توزیع‌پذیری (پخشی) اجتماع در اشتراک:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad , \qquad \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$ (برقرار است)

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup \left(\tilde{B} \cap \tilde{C}\right) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})}(x) &= \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{(\tilde{B}\cap\tilde{C})}(x)] \\ &= \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \min[\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)]] \\ &= \min[\max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)], \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)] = \min[\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{C}}(x)] \\ &= \mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cup\tilde{C})}(x)\} = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})\end{aligned}$$

۷- خاصیت توزیع‌پذیری (پخشی) اشتراک در اجتماع:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad , \qquad \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$ (برقرار است)

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cap \left(\tilde{B} \cup \tilde{C}\right) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})}(x) &= \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{(\tilde{B}\cup\tilde{C})}(x)] \\ &= \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \max[\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)]] \\ &= \max[\min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)], \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)] = \max[\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{C}}(x)] \\ &= \mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})}(x)\} = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})\end{aligned}$$

۸- خاصیت خودتوانی اجتماع:

$A \cup A = A \qquad , \qquad \tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$ (برقرار است)

$$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}}(x) = \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)] = \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \tilde{A}$$

۹- خاصیت خودتوانی اشتراک:

$A \cap A = A \qquad , \qquad \tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$ (برقرار است)

$$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}(x) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)] = \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \tilde{A}$$

۱۰- خاصیت جذب اجتماع در اشتراک:

$A \cup (A \cap B) = A \qquad , \qquad \tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$ (برقرار است)

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cup \left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{B})}(x) &= \max\left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})}(x)\right] \\ &= \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]] = \begin{cases}\mu_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A} & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\} \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A} & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\}\end{cases}\end{aligned}$$

۱۱- خاصیت جذب اشتراک در اجتماع:

$A \cap (A \cup B) = A \qquad , \qquad \tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$ (برقرار است)

$$\begin{aligned}\tilde{A} \cap \left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap(\tilde{A}\cup\tilde{B})}(x) &= \min\left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})}(x)\right] \\ &= \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]] = \begin{cases}\mu_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A} & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\} \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A} & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\}\end{cases}\end{aligned}$$

۱۱- خاصیت جذب اجتماع با مجموعه‌ی جهانی:

$A \cup U = U \qquad , \qquad \tilde{A} \cup \widetilde{U} = \widetilde{U}$ (برقرار است)

$$\tilde{A} \cup \widetilde{U} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup\widetilde{U}}(x) = \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{U}}(x)] = \mu_{\widetilde{U}}(x)\} = \widetilde{U}$$

۱۲- خاصیت جذب اشتراک با مجموعه‌ی جهانی:

$A \cap U = A \qquad , \qquad \tilde{A} \cap \tilde{U} = \tilde{A}$ (برقرار است)

$\tilde{A} \cap \tilde{U} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{U}}(x) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{U}}(x)] = \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \tilde{A}$

۱۳- خاصیت جذب اجتماع با مجموعه‌ی تهی:

$A \cup \phi = A \qquad , \qquad \tilde{A} \cup \phi = \tilde{A}$ (برقرار است)

$\tilde{A} \cup \phi = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup\phi}(x) = \max\left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\phi}(x)\right] = \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \tilde{A}$

۱۴- خاصیت جذب اشتراک با مجموعه‌ی تهی:

$A \cap \phi = \phi \qquad , \qquad \tilde{A} \cap \phi = \phi$ (برقرار است)

$\tilde{A} \cap \phi = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap\phi}(x) = \min\left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\phi}(x)\right] = \mu_{\phi}(x)\} = \phi$

۱۵- قانون اجتماع با مکمل:

$A \cup \bar{A} = U \qquad , \qquad \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \neq \tilde{U}$ (برقرار نیست)

$\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cup\bar{\tilde{A}}}(x) = \max\left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)\right] = \max[\mu_{\tilde{A}}(x), 1-\mu_{\tilde{A}}(x)]\} \neq \tilde{U}$

۱۶- قانون تناقض:

$A \cap \bar{A} = \phi \qquad , \qquad \tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \neq \phi$ (برقرار نیست)

$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}\cap\bar{\tilde{A}}}(x) = \min\left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)\right] = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), 1-\mu_{\tilde{A}}(x)]\} \neq \phi$

۱۷- خاصیت قانون دمورگان (اجتماع به اشتراک):

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad , \qquad \overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cap \bar{\tilde{B}}$ (برقرار است)

$$\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \{x \mid \mu_{\overline{\tilde{A}\cup\tilde{B}}}(x) = 1-\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = 1-\max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] =$$
$$= \begin{cases} 1-\mu_{\tilde{A}}(x) & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\} \; ① \\ 1-\mu_{\tilde{B}}(x) & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\} \; ② \end{cases}$$

$$\bar{\tilde{A}} \cap \bar{\tilde{B}} = \{x \mid \mu_{\bar{\tilde{A}}\cap\bar{\tilde{B}}}(x) = \min\left[\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x), \mu_{\bar{\tilde{B}}}(x)\right] = \min[1-\mu_{\tilde{A}}(x), 1-\mu_{\tilde{B}}(x)]$$
$$= \begin{cases} 1-\mu_{\tilde{A}}(x) & if\left(1-\mu_{\tilde{A}}(x) < 1-\mu_{\tilde{B}}(x)\right) \\ 1-\mu_{\tilde{B}}(x) & if\left(1-\mu_{\tilde{A}}(x) > 1-\mu_{\tilde{B}}(x)\right) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1-\mu_{\tilde{A}}(x) & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\} \; ① \\ 1-\mu_{\tilde{B}}(x) & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\} \; ② \end{cases}$$

۱۸- خاصیت قانون دمورگان (اشتراک به اجتماع):

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad , \qquad \overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}}$ (برقرار است)

$$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \{x \mid \mu_{\overline{\tilde{A}\cap\tilde{B}}}(x) = 1-\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = 1-\min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] =$$
$$= \begin{cases} 1-\mu_{\tilde{B}}(x) & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\} \; ① \\ 1-\mu_{\tilde{A}}(x) & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)\right)\} \; ② \end{cases}$$

$$\bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}} = \{x \mid \mu_{\bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}}}(x) = \max\left[\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x), \mu_{\bar{\tilde{B}}}(x)\right] = \max[1-\mu_{\tilde{A}}(x), 1-\mu_{\tilde{B}}(x)]$$

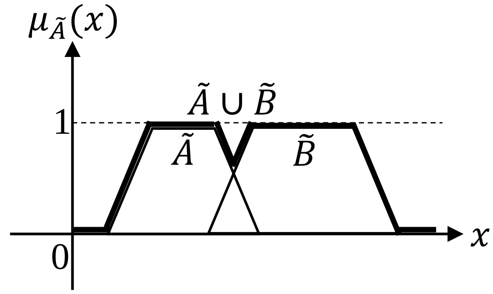
$$= \begin{cases} 1-\mu_{\tilde{B}}(x) & if\left(1-\mu_{\tilde{A}}(x) < 1-\mu_{\tilde{B}}(x)\right) \\ 1-\mu_{\tilde{A}}(x) & if\left(1-\mu_{\tilde{A}}(x) > 1-\mu_{\tilde{B}}(x)\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-\mu_{\tilde{B}}(x) & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \} \text{①} \\ 1-\mu_{\tilde{A}}(x) & if\left(\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \} \text{②} \end{cases}$$

اجتماع مجموعه‌های فازی

تابع عضویت اجتماع دو مجموعه‌ی فازی با به کارگیری عملگر حداکثر به صورت زیر بدست می‌آید که در شکل زیر به تصویر کشیده شده است.

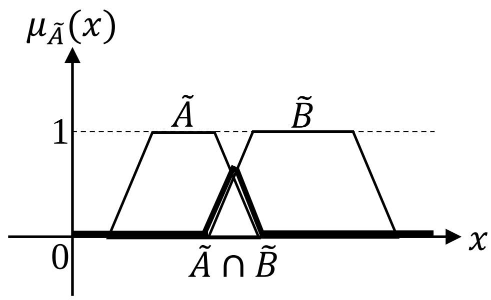
$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max[(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$$



اشتراک مجموعه‌های فازی

تابع عضـویت اشتراک دو مجموعه‌ی فازی با بکارگیری عملگر حداقل به صورت زیر بدست می‌آید که در شکل زیر به تصویر کشیده شده است.

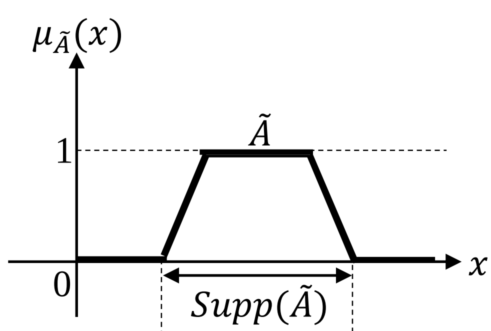
$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min[(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$$



مجموعه‌ی پشتیبانِ یک مجموعه‌ی فازی (Supply Set)

مجموعه‌ی پشـتیبان هر مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی کلاسیک است که زیرمجموعه‌ای از عناصر مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت (درجه عضویت) مثبت است و به صورت زیر تعریف می‌شود و نمایش شماتیک آن به شکل زیر می‌باشد.

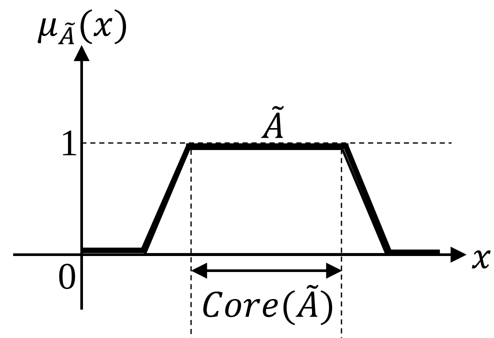
$$Supp(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$



مجموعه‌ی هسته‌ی یک مجموعه‌ی فازی (Core Set)

مجموعه‌ی هسته‌ی هر مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی کلاسیک است که زیرمجموعه‌ای از عناصر مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت (درجه عضویت) یک می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود و نمایش شماتیک آن به شکل زیر می‌باشد.

$Core(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$



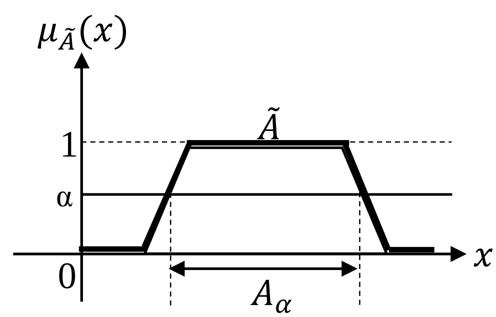
برش آلفا (α-Cut) در مجموعه‌های فازی

برش آلفا در مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی کلاسیک است که زیرمجموعه‌ای از عناصر مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت (درجه عضویت) بزرگ‌تر یا مساوی α می‌باشد و به صورت A_α نشان داده می‌شود.

$A_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$

اگر در برش آلفا، زیرمجموعه‌ی عناصر با تابع عضویت (درجه عضویت) بزرگ‌تر از α تعیین شوند، به آن برش قویِ آلفا گفته شده و به صورت A'_α یا A_{α^+} نشان داده می‌شود.

$A'_\alpha = A_{\alpha^+} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$



مثال: فرض کنید مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ روی مجموعه‌ی جهانی $X = \{1,2,3,4\}$ به صورت زیر تعریف شود:

$\tilde{A} = \{\frac{0.2}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{0.8}{3}, \frac{0}{4}\}$

این مجموعه‌ی فازی، با برش مقادیر مختلف α می‌تواند به مجموعه‌های کلاسیک تبدیل شود، مانند:

$A_0 = \{1,2,3,4\}$

$A_{0^+} = A'_0 = \{1,2,3\}$

$A_{0.3} = \{2,3\}$

$A_{0.9} = \{\phi\}$

$A_1 = \{\phi\}$

نکته: $A'_0 = A_{0^+} = Supp(\tilde{A})$

نکته: $A_1 = Core(\tilde{A})$

خواص برش α بر روی عملیات استاندارد

1. $\left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$

2. $\left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$, $\bar{\tilde{A}}_\alpha \neq \bar{A}_\alpha \,:\, \alpha = 0.5$ به غیر از مقدار

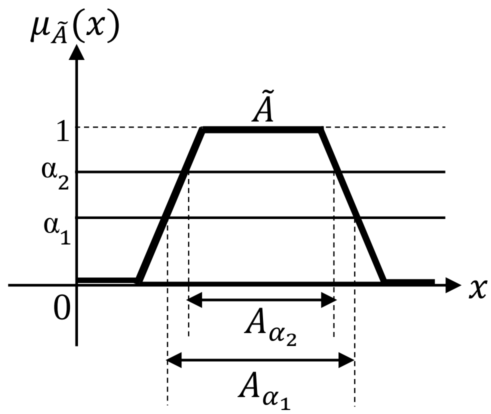
منظور از $\tilde{A}_\alpha$ ، ضـرب مقدار α در تابع عضویت (درجه عضویت) عناصر مجموعه‌ی A_α است. با این عمل، مجموعه‌ی کلاسیک A_α تبدیل به مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}_\alpha$ می‌شود که تابع عضویت (درجه عضویت) عناصر آن، صفر یا α است.

3. برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و دو مقدار α_1 و α_2 در بازه‌ی $[0,1]$ با فرض $\alpha_1 < \alpha_2$ خواص زیر برقرار است:

3.1. $A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$

3.2. $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = A_{\alpha_2}$

3.3. $A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} = A_{\alpha_1}$



اصل تجزیه‌ی مجموعه‌های فازی

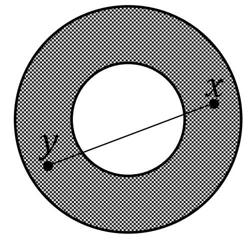
یک راه دیگر نمایش مجموعه‌های فازی، استفاده از برش‌های α آن است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود که به آن، اصل تجزیه‌ی مجموعه‌های فازی نیز گفته می‌شود.

$\tilde{A} = \cup \alpha A_\alpha \quad , \quad \alpha \in [0,1]$

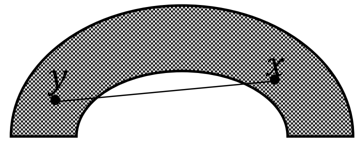
منظور از αA_α ، ضرب مقدار α در تابع عضویت (درجه عضویت) عناصر مجموعه‌ی A_α است. با این عمل، مجموعه‌ی کلاسـیک A_α تبدیل به یک مجموعه‌ی فازی می‌شـود که تابع عضویت (درجه عضویت) عناصر آن، صفر یا α است که با $\tilde{A}_\alpha$ نشـان داده می‌شـود. لذا با اجتماع مجموعه‌های فازی $\tilde{A}_\alpha$ به ازای تمام مقادیر α بین صـفر و یک، مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ بدست می‌آید.

مجموعه‌ی فازی محدب

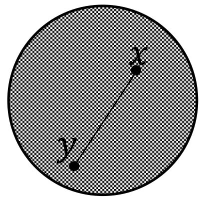
در یک فضـای اقلیدسی، مجموعه‌ی محدب یا کوژ (Convex set) به مجموعه‌ای اطلاق می‌گردد که پاره‌خط راستِ واصل هر دو نقطه‌ی دلخواه درون آن، خود به طور کامل در داخل مجموعه باقی بماند.



مجموعه‌ی غیرمحدب



مجموعه‌ی غیرمحدب



مجموعه‌ی محدب

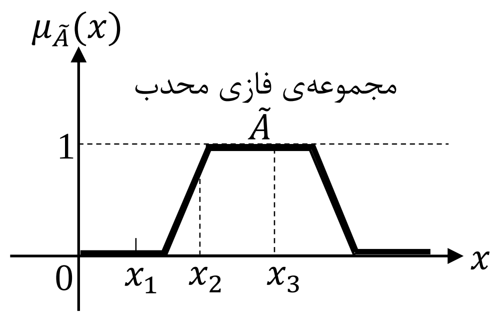
مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب است، اگر داشته باشیم:

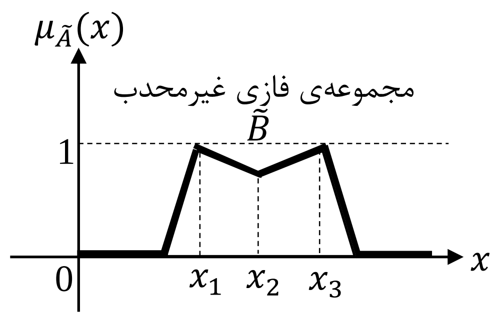
$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$$

λ عددی بین صفر و یک است. به عبارت دیگر مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب است، اگر تمام برش‌های α آن مجموعه محدب باشند.

تعریف دیگری برای مجموعه‌های فازی محدب وجود دارد، به طوری که مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب است، اگر برای هر عنصر x_1 ، x_2 و x_3 رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$x_1 < x_2 < x_3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_3)]$$





خاصیت عمومی: اشتراک چند مجموعه‌ی فازی محدب، یک مجموعه‌ی فازی محدب خواهد بود.

ارتفاع مجموعه‌ی فازی

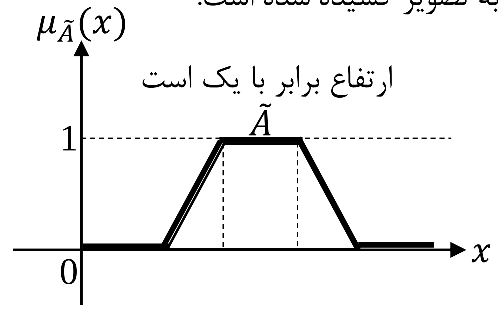
ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی، برابر با حداکثر تابع عضویت (درجه عضویت) عناصر آن مجموعه است. به عبارت دیگر:

$$h(\tilde{A}) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x))$$

مجموعه‌ی فازی نرمال

مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نرمال اســت، اگر ارتفاع آن برابر با یک باشــد؛ در غیر این‌صورت، مجموعه‌ی فازی زیر نرمال است. $h(\tilde{A}) = 1$

در شکل زیر یک مجموعه‌ی فازی نرمال به تصویر کشیده شده است.



کاردینالیتی یک مجموعه‌ی فازی

برای یک مجموعه‌ی فازی متناهی $\tilde{A}$ ، کاردینالیتی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

مثال: کاردینالیتی مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{\frac{0.5}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.4}{3}\}$ را حساب کنید.

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5 + 0.2 + 0.4 = 1.1$$

کاردینالیتی نسبی یک مجموعه‌ی فازی

برای یک مجموعه‌ی فازی متناهی $\tilde{A}$ ، نسبت کاردینالیتی به تعداد اعضای مجموعه را کاردینالیتی نسبی می‌گویند.

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} = \frac{\sum \mu_{\tilde{A}}(x)}{|X|}$$

مثال: کاردینالیتی نسبی مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{\frac{0.5}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.4}{3}\}$ را حساب کنید.

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5 + 0.2 + 0.4 = 1.1$$

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} = \frac{1.1}{3} \approx 0.37$$

اجتماع‌ها بر روی مجموعه‌های فازی

۱- اجتماع مجموعه‌های فازی: اجتماع دو مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی خواهد بود که قبلاً به صـــورت زیر تعریف کردیم:

$$\tilde{E} = \tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x)) \mid \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]\}$$

۲- جمع جبری مجموعه‌های فازی: جمع جبری دو مجموعـه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی خواهد بود که به صـــورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{E} = \tilde{A} + \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}(x)) \mid \mu_{\tilde{A} + \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) . \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

در مجموعه‌های کلاسیک، جمع جبری و اجتماع دو مجموعه به یک جواب می‌رسد، در حالی‌که در مجموعه‌های فازی این‌طور نیست.

مثال: برای مجموعه‌های کلاسیک $A = \{3,4\}$ و $B = \{2,3\}$ داریم:

$$A + B = A \cup B = \{2,3,4\}$$

مثال: برای مجموعه‌های فازی $\tilde{C} = \left\{\frac{0.2}{1}, \frac{0.3}{2}\right\}$ و $\widetilde{D} = \left\{\frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}\right\}$ داریم:

$$\tilde{C} + \widetilde{D} = \left\{\frac{0.84}{1}, \frac{0.72}{2}\right\}$$

$$\tilde{C} \cup \widetilde{D} = \left\{\frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}\right\}$$

$$\tilde{C} + \widetilde{D} \neq \tilde{C} \cup \widetilde{D}$$

۳- جمع کران‌دار مجموعه‌های فازی: جمع کران‌دار دو مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{E} = \tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x)) \mid \mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) = \min[1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)]\}$$

در مجموعه‌های کلاسیک، جمع کران‌دار و اجتماع دو مجموعه به یک جواب می‌رسد، در حالی‌که در مجموعه‌های فازی این‌طور نیست.

مثال: برای مجموعه‌های کلاسیک $A = \{3,4\}$ و $B = \{2,3\}$ داریم:

$$A \oplus B = A \cup B = \{2,3,4\}$$

مثال: برای مجموعه‌های فازی $\tilde{C} = \left\{\frac{0.2}{1}, \frac{0.3}{2}\right\}$ و $\widetilde{D} = \left\{\frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}\right\}$ داریم:

$$\tilde{C} \oplus \widetilde{D} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0.9}{2}\right\}$$

$$\tilde{C} \cup \widetilde{D} = \left\{\frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}\right\}$$

$$\tilde{C} \oplus \widetilde{D} \neq \tilde{C} \cup \widetilde{D}$$

۴- جمع دِرَسـتیک (Drastic Sum) مجموعه‌های فازی: جمع درسـتیک دو مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{E} = \tilde{A} \dot{\cup} \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A}\dot{\cup}\tilde{B}}) \mid \mu_{\tilde{A}\dot{\cup}\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) & if\ \mu_{\tilde{B}}(x) = 0 \\ \mu_{\tilde{B}}(x) & if\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \\ 1 & otherwise \end{cases} \}$$ (دیدگاه خوش‌بینانه)

در مجموعه‌های کلاسیک، جمع درستیک و اجتماع دو مجموعه به یک جواب می‌رسد، در حالی‌که در مجموعه‌های فازی این‌طور نیست.

مثال: برای مجموعه‌های کلاسیک $A = \{3,4\}$ و $B = \{2,3\}$ داریم:

$$A \dot{\cup} B = A \cup B = \{2,3,4\}$$

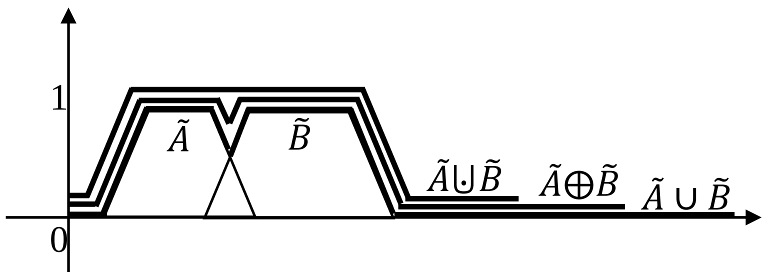
مثال: برای مجموعه‌های فازی $\tilde{C}=\left\{\frac{0.2}{1},\frac{0.3}{2}\right\}$ و $\tilde{D}=\left\{\frac{0.8}{1},\frac{0.6}{2}\right\}$ داریم:

$$\tilde{C}\dot{\cup}\tilde{D}=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2}\right\}$$

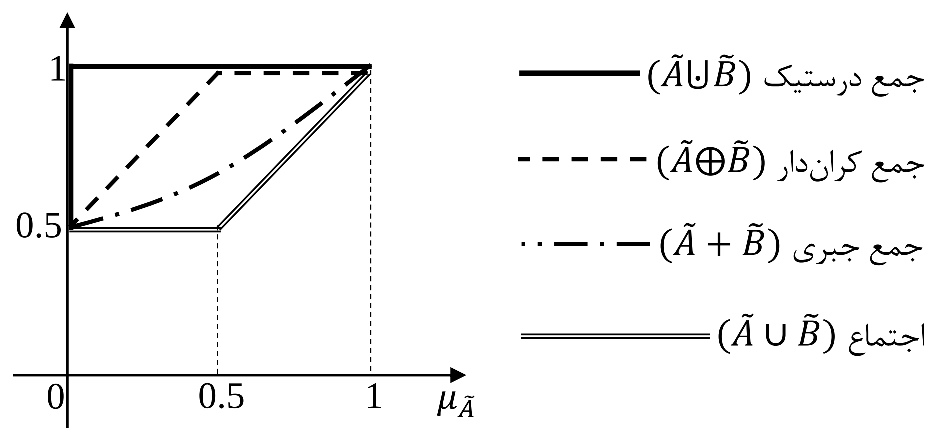
$$\tilde{C}\cup\tilde{D}=\left\{\frac{0.8}{1},\frac{0.6}{2}\right\}$$

$$\tilde{C}\dot{\cup}\tilde{D}\neq\tilde{C}\cup\tilde{D}$$

مثال: اجتماع، جمع کران‌دار و جمع درستیک را برای دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ رسم کنید.



مثال: فرض کنیم $\mu_{\tilde{B}}=0.5$ باشد. اجتماع، جمع جبری، جمع کران‌دار و جمع درستیک را رسم کنید.



s-norms: عملگرهای اجتماع مجموعه‌های فازی، به فرم مثلثی s-norms معروف هستند:

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}\leq s(\tilde{A},\tilde{B})\leq\tilde{A}\dot{\cup}\tilde{B}$$ (قانون $s-norms$)

نکته: فرم مثلثی s-norm، همانند میانگین‌های حسابی، هندسی و هارمونیک در ریاضی می‌باشند.

مثال: میانگین‌های حسابی، هندسی و هارمونیک را برای اعداد ۴ و ۵ و ۶ حساب کنید.

(فرمول میانگین حسابی) : $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, $\frac{4+5+6}{3}=5$

(فرمول میانگین هندسی) : $\sqrt[n]{a_1\times a_2\times\ldots\times a_n}$, $\sqrt[3]{4\times5\times6}\approx4.93$

(فرمول میانگین هارمونیک) : $\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$, $\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}\approx1.62$

اشتراک‌ها بر روی مجموعه‌های فازی

۱- اشتراک مجموعه‌های فازی: اشتراک دو مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی خواهد بود که قبلاً به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)) \mid \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]\}$$

۲- ضـــرب جبری مجموعه‌های فازی: ضـرب جبری دو مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \tilde{A}.\tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x)) \mid \mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

مثال: برای مجموعه‌های فازی $\tilde{A} = \left\{\frac{0.4}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.2}{3}\right\}$ و $\tilde{B} = \left\{\frac{0.8}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.7}{3}\right\}$ داریم:

$$\tilde{A}.\tilde{B} = \left\{\frac{0.32}{1}, \frac{0.12}{2}, \frac{0.14}{3}\right\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{\frac{0.4}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.2}{3}\right\}$$

$$\tilde{A}.\tilde{B} \neq \tilde{A} \cap \tilde{B}$$

۳- تفاضل کران‌دار مجموعه‌های فازی: تفاضل کران‌دار دو مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \odot \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A}\odot\tilde{B}}(x)) \mid \mu_{\tilde{A}\odot\tilde{B}}(x) = \max[0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1]\}$$

مثال: برای مجموعه‌های فازی $\tilde{A} = \left\{\frac{0.4}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.2}{3}\right\}$ و $\tilde{B} = \left\{\frac{0.8}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.7}{3}\right\}$ داریم:

$$\tilde{A} \odot \tilde{B} = \left\{\frac{0.2}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}\right\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{\frac{0.4}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.2}{3}\right\}$$

$$\tilde{A} \odot \tilde{B} \neq \tilde{A} \cap \tilde{B}$$

۴- ضرب دِرَستیک (Drastic Product) مجموعه‌های فازی: ضرب درستیک دو مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه‌ی فازی خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{(x, \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}) \mid \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) & if\ \mu_{\tilde{B}}(x) = 1 \\ \mu_{\tilde{B}}(x) & if\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}\right\}$$ (دیدگاه بدبینانه)

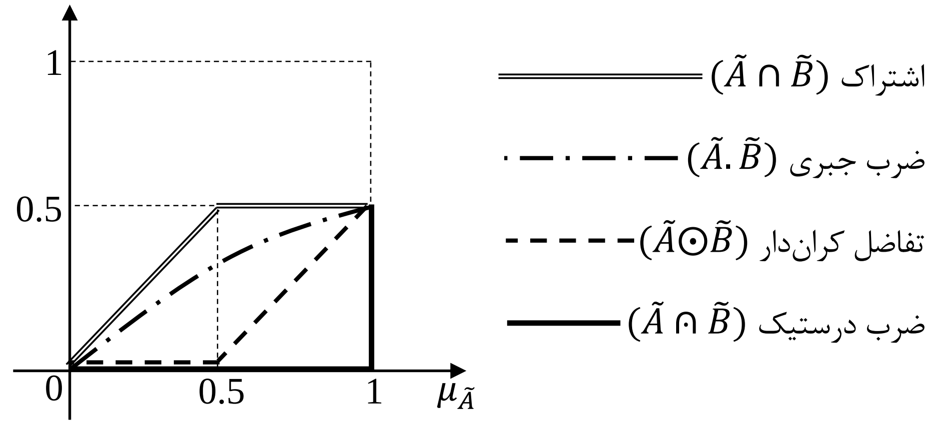
مثال: برای مجموعه‌های فازی $\tilde{A} = \left\{\frac{0.4}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.2}{3}\right\}$ و $\tilde{B} = \left\{\frac{0.8}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.7}{3}\right\}$ داریم:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}\right\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{\frac{0.4}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.2}{3}\right\}$$

$\tilde{A} \cap \tilde{B} \neq \tilde{A} \cap \tilde{B}$

مثال: فرض کنیم $\mu_{\tilde{B}} = 0.5$ باشد. اشتراک، ضرب جبری، تفاضل کران‌دار و ضرب درستیک را رسم کنید.



t-norms: عملگرهای اشتراک مجموعه‌های فازی، به فرم مثلثی t-norms معروف هستند:

$$\tilde{A} \Cap \tilde{B} \leq t(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq \tilde{A} \cap \tilde{B} \quad (\text{قانون } t-norms)$$

ارتباط بین عملگرهای s و t

تبدیل عملگر t به s در فضای $([0,1] \times [0,1] \to [0,1])$ از طریق رابطه‌ی زیر انجام می‌شود. بر اساس قانون دمورگان اجتماع به اشتراک $(A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}})$ داریم:

$$t[x, y] = \overline{s[\bar{x}, \bar{y}]} = 1 - s[1 - x, 1 - y]$$

تبدیل عملگر s به t در فضای $([0,1] \times [0,1] \to [0,1])$ از طریق رابطه‌ی زیر انجام می‌شود. بر اساس قانون دمورگان اشتراک به اجتماع $(A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}})$ داریم:

$$s[x, y] = \overline{t[\bar{x}, \bar{y}]} = 1 - t[1 - x, 1 - y]$$

نظریه‌ی عملیات مجموعه‌ها

به طور کلی عملگرهای s-norms که به اختصار عملگرهای s نامیده می‌شوند، برای اجتماع مجموعه‌های فازی و عملگرهای t-norms که به اختصار عملگرهای t نامیده می‌شوند، برای اشتراک مجموعه‌های فازی استفاده می‌شوند.

عملگرهای s

اگر برای هر عملگر s، به ازای مقادیر x ، y ، z و w در بازه‌ی $[0,1]$ روابط زیر برقرار باشند، آن‌گاه آن عملگر متعلق به طبقه‌ی عملگرهای s-norms خواهد بود.

1. (شرط مرزی) $\quad s[x, 1] = s[1, x] = 1$

2. (شرط جابجایی) $\quad s[x, y] = s[y, x]$

3. (شرط شرکت‌پذیری) $\quad s[x, s[y, z]] = s[s[x, y], z]$

4. ((monotonic) شرط افزایشی) $\quad s[x,y] \le s[z,w] \;;\; x \le z \;\; and \;\; y \le w$

نکته: برای مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ، پارامترهای $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $\mu_{\tilde{B}}(x)$ جایگزین x و y در روابط فوق می‌شوند.

عملگرهای t

اگر برای هر عملگر t، به ازای مقادیر x ، y ، z و w در بازه‌ی $[0,1]$ روابط زیر برقرار باشند، آن‌گاه آن عملگر متعلق به طبقه‌ی عملگرهای t-norms خواهد بود.

1. (شرط مرزی) $\quad t[x,0] = t[0,x] = 0$

2. (شرط جابجایی) $\quad t[x,y] = t[y,x]$

3. (شرط شرکت‌پذیری) $\quad t[x,t[y,z]] = t[t[x,y],z]$

4. ((monotonic) شرط افزایشی) $\quad t[x,y] \le t[z,w] \;;\; x \le z \;\; and \;\; y \le w$

نکته: برای مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ، پارامترهای $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $\mu_{\tilde{B}}(x)$ جایگزین x و y در روابط فوق می‌شوند.

مثال: ثابت کنید که $\tilde{A}\oplus\tilde{B} = \left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}\right) \middle| \, \mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}} = \min[1,\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)]\right\}$ یک s-norm است.

جواب:

۱- تست شرط مرزی:

$$s[x,1] = s[1,x] = 1$$
$$s[\mu_{\tilde{A}}(x),1] = \min[1,\mu_{\tilde{A}}(x)+1] = \min[1,1+\mu_{\tilde{A}}(x)] = s[1,\mu_{\tilde{A}}(x)]$$
$$\mu_{\tilde{A}}(x) \ge 0 \Longrightarrow \min[1,\mu_{\tilde{A}}(x)+1] = \min[1,1+\mu_{\tilde{A}}(x)] = 1 \Longrightarrow s[\mu_{\tilde{A}}(x),1] = s[1,\mu_{\tilde{A}}(x)] = 1$$

۲- تست شرط جابجایی:

$$s[x,y] = s[y,x]$$
$$s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)] = \min[1,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)] = \min[1,\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{A}}(x)] = s[\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{A}}(x)]$$

۳- تست شرط شرکت‌پذیری:

$$s\big[x,s[y,z]\big] = s[s[x,y],z]$$

$$\begin{aligned}
s\big[\mu_{\tilde{A}}(x),s[\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)]\big] &= \min\big[1,\mu_{\tilde{A}}(x)+s[\mu_{\tilde{B}}(x),\mu_{\tilde{C}}(x)]\big] \\
&= \min[1,\mu_{\tilde{A}}(x)+\min[1,\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x)]] \\
&= \begin{cases} \min[1,\mu_{\tilde{A}}(x)+1] & if\ \mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) > 1 \\ \min[1,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x)] & if\ \mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) < 1 \end{cases} \xRightarrow{\mu_{\tilde{A}}(x)\ge 0} \\
&= \begin{cases} 1 & if\ \mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) > 1\} \ (1) \\ \begin{cases} 1 & if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) > 1\} \ (2) \\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) & if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) < 1\} \ (3) \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s[s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)],\mu_{\tilde{C}}(x)] &= \min[1, s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)] + \mu_{\tilde{C}}(x)] \\
&= \min[1, \min[1, \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)] + \mu_{\tilde{C}}(x)] \\
&= \begin{cases} \min[1, 1+\mu_{\tilde{C}}(x)] & if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) > 1 \\ \min[1, \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x)] & if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) < 1 \end{cases} \xRightarrow{\mu_{\tilde{C}}(x)\geq 0} \\
&= \begin{cases} 1 & if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) > 1\} \ ① \\ \begin{cases} 1 & if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) > 1\} \ ② \\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) & if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{C}}(x) < 1\} \ ③ \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}
$$

۴- تست شرط افزایشی:

$$s[x,y] \leq s[z,w] \ ; \ x \leq z \ \ and \ \ y \leq w$$

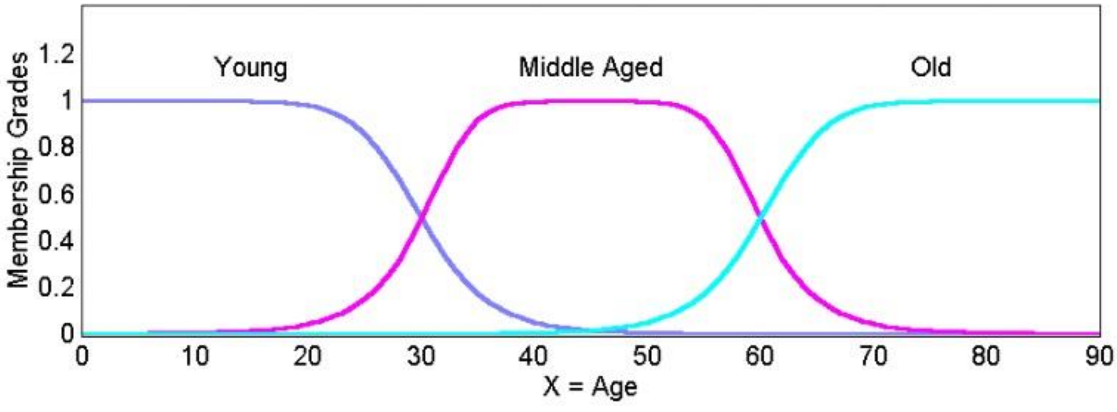
$$if\ \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x) \ \ and \ \ \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{D}}(x) \Longrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x) \ \circledast$$

$$
\begin{aligned}
&① \ if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) > 1 \quad , \quad ①,\circledast \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x) > 1 \ , \Longrightarrow \\
&\quad s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)] = \min[1, \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)] = 1 \ , \Longrightarrow \\
&\quad s[\mu_{\tilde{C}}(x),\mu_{\tilde{D}}(x)] = \min[1, \mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x)] = 1 \ , \Longrightarrow \\
&\quad s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)] = s[\mu_{\tilde{C}}(x),\mu_{\tilde{D}}(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&② \ if\ \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) < 1 \Longrightarrow \\
&\begin{cases}
\mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x) > 1 \Longrightarrow & s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)] = \min[1, \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)] = \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) \ , \\
& s[\mu_{\tilde{C}}(x),\mu_{\tilde{D}}(x)] = \min[1, \mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x)] = 1 \ , \Longrightarrow \\
& s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)] \leq s[\mu_{\tilde{C}}(x),\mu_{\tilde{D}}(x)] \\
\mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x) < 1 \Longrightarrow & s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)] = \min[1, \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)] = \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) \ , \\
& s[\mu_{\tilde{C}}(x),\mu_{\tilde{D}}(x)] = \min[1, \mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x)] = \mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x) \ , \\
& \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x)+\mu_{\tilde{D}}(x) \ \circledast \ , \Longrightarrow \\
& s[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)] \leq s[\mu_{\tilde{C}}(x),\mu_{\tilde{D}}(x)]
\end{cases}
\end{aligned}
$$

افراز فازی (Fuzzy Partitioning)

در افراز مجموعه‌های کلاسیک، وقتی بخواهیم مجموعه‌ی جهانی را به چند زیر مجموعه تقسیم کنیم، مثلاً می‌گوییم افراد بین ۰ تا ۳۰ سال جوان، افراد بین ۳۰ تا ۶۰ سال میان‌سال، و افراد ۶۰ سال به بالا مسن هستند؛ ولی در افراز فازی مرزها به صورت تدریجی می‌باشند.



$\forall\, i \quad \tilde{A}_i \neq \phi\,, \tilde{A}_i \neq X$

$\forall\, i,j \quad \tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \phi$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_i = X$$

مثال: اگر مجموعه‌ی جهانی $U = (1,2,3,4\}$ باشد، آن‌گاه افرازهای فازی زیر را داریم:

$A_1 = \{(1\,, 0.2)\}$

$A_2 = \{(1\,, 0.8), (2\,, 0.3)\}$

$A_3 = \{(2\,, 0.3), (3\,, 1)\}$

$A_4 = \{(2\,, 0.4), (4\,, 1)\}$

ضرب کارتزین و رابطه‌ی ریاضی بر روی مجموعه‌های کلاسیک

ضرب کارتزین:

$A = \{x \mid x \in U\}$

$B = \{y \mid y \in U\}$

$\left(\text{ضرب کارتزین}\right) A \times B = \{(x, y) \mid x \in A\,, y \in B\}$

مثال: اگر $A = \{1,2\}$ و $B = \{4,5,6\}$ باشند، ضرب کارتزین آن‌ها را محاسبه کنید.

جواب: $A \times B = \{(1\,,4), (1\,,5), (1\,,6), (2\,,4), (2\,,5), (2\,,6)\}$

مجموعه‌ی توانی $\boldsymbol{A}$ یا $\boldsymbol{P_A}$: مجموعه‌ای از همه‌ی زیرمجموعه‌های A است.

مثال: برای مثال قبل داریم:

$P_A = \{\, \{\phi\}\,, \{1\}\,, \{2\}\,, \{1\,,2\}\, \}$

$P_{A\times B} = \{\, \{\phi\}\,, \{(1\,,4)\}\,, \ldots \{(1\,,4)\,, (1\,,5)\,\}\,, \ldots \{(1\,,4)\,, (1\,,5)\,, (1\,,6)\}, \ldots \}$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی nعضوی برابر با 2^n است.

رابطه‌ی ریاضی:

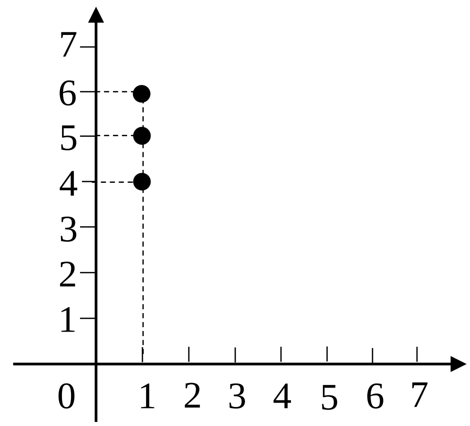
$$\begin{cases} xRy \\ (x, y) \in R \end{cases} \Longrightarrow R \subseteq A \times B \quad , \quad R = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\,, x \in A\,, y \in B\}$$

نکته: xRy یا $(x, y) \in R$ به این معناست که y نگاشت x در رابطه‌ی R است.

مثال: اگر $A = \{1,2\}$ و $B = \{4,5,6\}$ باشد. روابط $R_1 = \{(1\,,4), (1\,,5), (1\,,6)\}$ و $R_2 = \{(1\,,4), (2\,,5)\}$ را در $A \times B = \{(1\,,4), (1\,,5), (1\,,6), (2\,,4), (2\,,5), (2\,,6)\}$ در نظر بگیرید.

در این مثال، رابطه‌ی R_1 پوشاست؛ زیرا بُرد را پوشش می‌دهد و رابطه‌ی R_2 یک به یک است؛ زیرا هر عضو از برد، تنها به یک عضو از دامنه مرتبط است (هر yی از B تنها به یک x از A مربوط است).

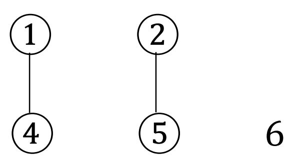
نمایش مختصاتی یا نموداری R_1 :



نمایش ماتریسی R_2 :

R_2	1	2
4	1	0
5	0	1
6	0	0

نمایش گرافیکی R_2 :



تعریف دامنه‌ی رابطه‌ی R :

$$Dom(R) = \{x \mid x \in A , (x,y) \in R ,\ \ for\ some\ \ y \in B\}$$

تعریف برد رابطه‌ی R :

$$Rang(R) = \{y \mid y \in B , (x,y) \in R ,\ \ for\ some\ \ x \in A\}$$

رابطه‌ی بازتابی:

$$xRx$$

رابطه‌ی متقارن:

$$xRy \Longrightarrow yRx$$

رابطه‌ی تعدی:

$$xRy , yRz \Longrightarrow xRz$$

$$R: A \times B \longrightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} (x,y) \in R & \mu_R = 1 \\ (x,y) \notin R & \mu_R = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right) \,\middle|\, x \in U \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \left(y, \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \,\middle|\, y \in U \right\}$$

$$\left(\text{ضرب کارتزین}\right) \tilde{A} \times \tilde{B} = \left\{ \left((x,y), \mu_{\tilde{A}\times\tilde{B}}(x,y)\right) \middle| \, x \in \tilde{A}\,, y \in \tilde{B} \quad, \quad 0 \le \mu_{\tilde{A}\times\tilde{B}}(x,y) \le 1 \right\}$$

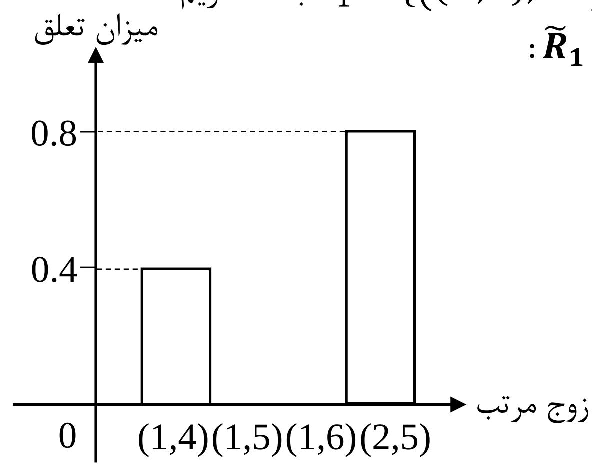
رابطه‌ی ریاضی:

$$\begin{cases} x\tilde{R}y \\ (x,y) \in \tilde{R} \end{cases} \Longrightarrow \tilde{R} \subseteq \tilde{A} \times \tilde{B}$$

$$\tilde{R} = \left\{ \left((x,y), \mu_{\tilde{R}}(x,y)\right) \middle| \, x \in \tilde{A}\,, y \in \tilde{B} \quad, \quad 0 \le \mu_{\tilde{R}}(x,y) \le 1 \right\}$$

مثال: اگر $\tilde{R}_1 = \{\left((1\,,4), 0.4\right), \left((2\,,5), 0.8\right)\}$ باشد. داریم:

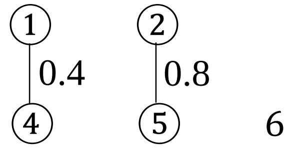
نمایش مختصاتی یا نموداری $\tilde{R}_1$:



نمایش ماتریسی $\tilde{R}_1$:

$\tilde{R}_1$	1	2
4	0.4	0
5	0	0.8
6	0	0

نمایش گرافیکی $\tilde{R}_1$:



تعریف دامنه‌ی رابطه‌ی $\tilde{R}$:

$$Dom(\tilde{R}) = \{(x, \mu_{\tilde{R}}(x,y)) \mid \mu_{\tilde{R}}(x,y) = \max[\mu_{\tilde{R}}(x,y)] \quad for \quad y \in \tilde{B}\}$$

تعریف برد رابطه‌ی $\tilde{R}$:

$$Rang(\tilde{R}) = \{(y, \mu_{\tilde{R}}(x,y)) \mid \mu_{\tilde{R}}(x,y) = \max[\mu_{\tilde{R}}(x,y)] \quad for \quad x \in \tilde{A}\}$$

مثال: دامنه و برد رابطه‌ی $\tilde{R}_2 = \{((1\,,4),0.4),((2\,,5),0.8),((1\,,5),0.6)\}$ را مشخص کنید.

جواب:

$$Dom(\tilde{R}_2) = \{(1\,,0.6),(2\,,0.8)\}$$

$$Rang(\tilde{R}_2) = \{(4\,,0.4),(5\,,0.8)\}$$

تعریف ماتریس یک رابطه‌ی فازی:

ماتریس رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{\tilde{R}} = (\mu_{\tilde{R}}(x,y))_{x\in\tilde{A}\,,y\in\tilde{B}}$$

مثال: اگر $\tilde{A} =$ {سرد , گرم} و $\tilde{B} =$ {آفتابی , ابری , بارانی , برفی} باشند، و رابطه‌ی $\tilde{R}$ را به صورت زیر داشته باشیم:

$\tilde{R} =$ {((سرد , آفتابی) , 0.3), ((سرد , ابری) , 0.6), ((سرد , بارانی) , 0.8), ((سرد , برفی) , 1),
((گرم , آفتابی) , 0.8), ((گرم , ابری) , 0.4), ((گرم , بارانی) , 0.2), ((گرم , برفی) , 0)}

آن‌گاه ماتریس رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$M_{\tilde{R}}$	سرد	گرم
آفتابی	0.3	0.8
ابری	0.6	0.4
بارانی	0.8	0.2
برفی	1	0

مثال: اگر $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ به صورت زیر باشند، مطلوب است: $\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$ و $M_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}$ و $M_{\tilde{\tilde{R}}_1}$.

$$\tilde{R}_1 = \{((1\,,4),0.2),((1\,,5),0.6),((2\,,4),0.3)\}$$
$$\tilde{R}_2 = \{((1\,,5),0.8),((2\,,4),0.1),((1\,,4),0.3)\}$$

جواب:

$$\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 = \{\big((1\,,4),0.3\big),\big((1\,,5),0.8\big),\big((2\,,4),0.3\big)\}$$

$M_{\bar{\tilde{R}}_1}$	1	2
4	0.8	0.7
5	0.4	1
6	1	1

$M_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}$	1	2
4	0.3	0.3
5	0.4	0
6	0	0

ترکیب روابط مجموعه‌های کلاسیک

$g\!:\{(x,y) \mid xgy : y = g(x)\}$

$f\!:\{(y,z) \mid yfz : z = f(y)\}$

$fog\!:\{(x,z) \mid xgy\,, yfz : z = f\big(g(x)\big)\}$

مثال:

f	4	5	6
7	1	0	1
8	0	1	0

g	1	2
4	1	1
5	0	1
6	0	0

fog	1	2
7	1	1
8	0	1

نکته: روش دیگر برای پیداکردن fog ، استفاده از ضرب ماتریس‌های g و f است.

نکته: درایه‌های ماتریس حاصلضرب، به ترتیب از ضرب درایه‌های یک سطر از ماتریس اول در درایه‌های یک ستون از ماتریس دوم، و سپس مجموع درایه‌های حاصل ایجاد می‌شود.

$$[a_{i1}\;\; a_{i2} \ldots\;\; a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}.\,b_{1j} + a_{i2}.\,b_{2j} + \cdots + a_{in}.\,b_{nj}$$

$$M_f \times M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ترکیب روابط مجموعه‌های فازی

ترکیب توابع بر روی مجموعه‌های فازی همانند ترکیب توابع بر روی مجموعه‌های کلاسیک است، با این تفاوت که درایه‌های ماتریس حاصلضرب، به ترتیب از مینیمم درایه‌های یک سطر از ماتریس اول و درایه‌های یک ستون از ماتریس دوم، و سپس ماکزیمم درایه‌های حاصل ایجاد می‌شود.

$$[a_{i1}\ \ a_{i2} \ldots\ \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \max\, [\min[a_{i1}, b_{1j}], \min[a_{i2}, b_{2j}], \ldots, \min[a_{in}, b_{nj}]]$$

مثال: اگر $\tilde{A} = \{$سرد , گرم$\}$ ، $\tilde{B} = \{$بارانی , ابری , آفتابی$\}$ و $\tilde{C} = \{$تعطیل , باز$\}$ باشند، و روابط $\tilde{R}_1 \subseteq A \times B$ و $\tilde{R}_2 \subseteq B \times C$ به صورت زیر تعریف شوند، آن‌گاه ماتریس $\tilde{R}_2 o \tilde{R}_1 \subseteq A \times C$ را بنویسید.

$\tilde{R}_2$	آفتابی	ابری	بارانی
باز	0.9	0.8	0.6
تعطیل	0.3	0.4	0.8

$\tilde{R}_1$	گرم	سرد
آفتابی	0.8	0.2
ابری	0.4	0.6
بارانی	0.2	0.8

$M_{\tilde{R}_2 o \tilde{R}_1}$	گرم	سرد
باز	$\max[\min[0.9, 0.8], \min[0.8, 0.4], \min[0.6, 0.2]]$	$\max[\min[0.9, 0.2], \min[0.8, 0.6], \min[0.6, 0.8]]$
تعطیل	$\max[\min[0.3, 0.8], \min[0.4, 0.4], \min[0.8, 0.2]]$	$\max[\min[0.3, 0.2], \min[0.4, 0.6], \min[0.8, 0.8]]$

$M_{\tilde{R}_2 o \tilde{R}_1}$	گرم	سرد
باز	$\max[0.8, 0.4, 0.2]$	$\max[0.2, 0.6, 0.6]$
تعطیل	$\max[0.3, 0.4, 0.2]$	$\max[0.2, 0.4, 0.8]$

$M_{\tilde{R}_2 o \tilde{R}_1}$	گرم	سرد
باز	0.8	0.6
تعطیل	0.4	0.8

نکته: عمل ترکیب توابع در مجموعه‌های فازی، یک نوع استنتاج فازی (Fuzzy Inference) است.

اعداد فازی (Fuzzy numbers)

اعداد فازی مجموعه‌های فازی ($\tilde{A}$) هستند که برای توصیف غیردقیق اعداد استفاده می‌شوند و شرایط زیر را دارند:

۱- $\tilde{A}$ باید یک مجموعه‌ی فازی محدب باشد.

$$\forall\, x_1, x_2, x_3 \quad : \quad x_1 < x_2 < x_3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_3)]$$

۲- $\tilde{A}$ باید یک مجموعه‌ی فازی نرمال باشد.

$\forall\, x\ \max\big(\mu_{\tilde{A}}(x)\big) = 1$ یا $\exists\, x\ \ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$

۳- $\tilde{A}$ باید روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) تعریف شده باشد.

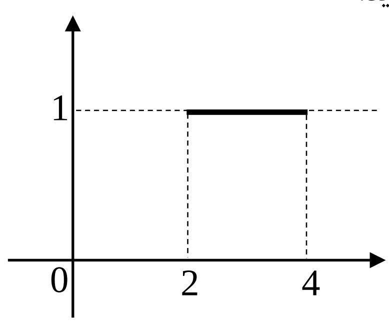
۴- $\tilde{A}$ باید روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) پیوسته باشد.

اعداد بازه‌ای (Interval Numbers)

این اعداد به جای این‌که یک مقدار داشته باشند، مقدار بازه‌ای دارند و از جهت مقدار دارای عدم قطعیت هستند. عدد بازه‌ای A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A = [a_1 \quad a_2]\ ;\ a_1 < a_2$$

مثال: عدد بازه‌ای $A = [2 \quad 4]$ را رسم کنید.

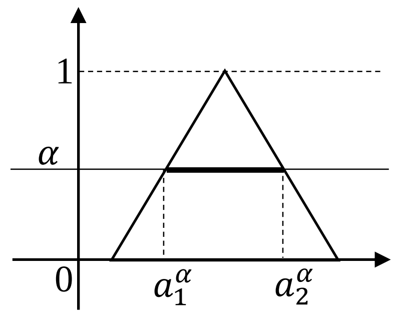


نکته: عدد بازه‌ای یک درجه پایین‌تر از عدد فازی است.

نکته: در مجموعه‌های فازی، میزان تعلق‌ها متفاوت است؛ اما در اعداد بازه‌ای، میزان تعلقِ اعداد داخل بازه 1 می‌باشد.

نکته: اگر یک مجموعه‌ی فازی محدب داشته باشیم و بر روی آن برش آلفا (α-cut) بزنیم، به یک مجموعه‌ی بازه‌ای تبدیل می‌شود. اگر $\tilde{A}_\alpha$ محدب باشد، یک عدد بازه‌ای می‌دهد.

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$
$$\tilde{A}_\alpha = \alpha A_\alpha$$
$$[a_1^\alpha \quad a_2^\alpha]$$



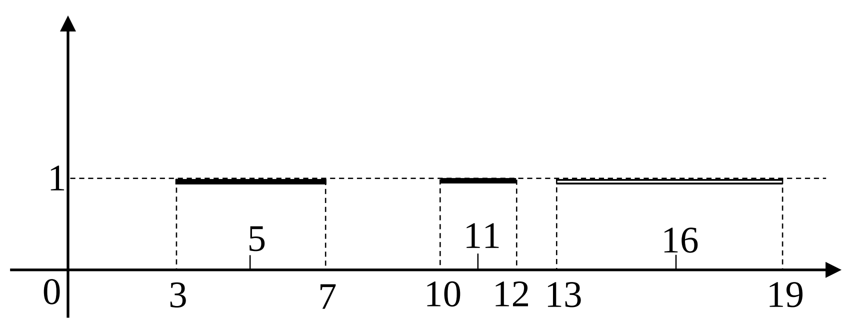
جمع اعداد بازه‌ای:

سؤال: آیا جمع دو عدد بازه‌ای $A = [a_1 \quad a_2]$ و $B = [b_1 \quad b_2]$ به صورت $A + B = [a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2]$ صحیح می‌باشد؟

جواب: بله.

مثال: حاصل‌جمع دو عدد بازه‌ای $A = [3 \quad 7]$ و $B = [10 \quad 12]$ را به صورت نموداری نشان دهید.

$A + B = [3 \quad 7] + [10 \quad 12] = [3 + 10 \quad 7 + 12] = [13 \quad 19]$



نکته: اگر اعداد وسط دو عدد بازه‌ای A و B را با هم جمع کنیم، عدد وسط بازه‌ی $A + B$ بدست می‌آید. بر این اساس می‌توانیم بگوییم که بین دو بازه‌ی یک عدد بازه‌ای، مانند $A = [a_1 \quad a_2]\ ;\ a_1 < a_2$ بی‌نهایت عدد وجود دارد. بنابراین مجموع این اعداد بین بازه‌ای در دو عدد بازه‌ای، می‌بایست در بازه‌ی حاصل جمع دو عدد بازه‌ای قرار گیرد.

(عدد وسطِ عدد بازه‌ای A) + (عدد وسطِ عدد بازه‌ای B) = (عدد وسطِ عدد بازه‌ای $A + B$)

$5 + 11 = 16$

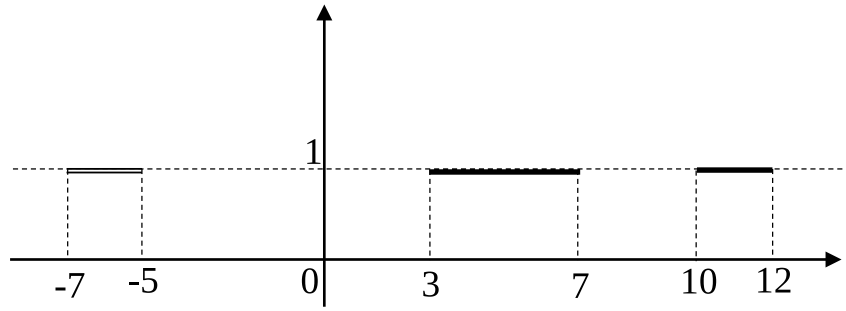
تفریق اعداد بازه‌ای:

سؤال: آیا تفریق دو عدد بازه‌ای $A = [a_1 \quad a_2]$ و $B = [b_1 \quad b_2]$ به صورت $A - B = [a_1 - b_1 \quad a_2 - b_2]$ صحیح می‌باشد؟

جواب: خیر.

مثال: حاصل‌تفریق دو عدد بازه‌ای $A = [3 \quad 7]$ و $B = [10 \quad 12]$ را به صورت نموداری نشان دهید.

$A - B = [3 \quad 7] - [10 \quad 12] = [3 - 10 \quad 7 - 12] = [-7 \quad -5]$



جواب $[-7 \quad -5]$ نادرست است، زیرا مثلاً تفریق اعداد 7 و 11 از هم $(7-11=-4)$ که به ترتیب در بازه‌های $[3 \quad 7]$ و $[10 \quad 12]$ قرار دارند، در بازه‌ی $[-7 \quad -5]$ قرار نمی‌گیرد و به اصطلاح بازه را پوشش نمی‌دهد.

اگر $B-A$ را حساب کنیم، داریم:

$$B-A=[10 \quad 12]-[3 \quad 7]=[10-3 \quad 12-7]=[7 \quad 5]$$

عدد $[7 \quad 5]$ نیز یک عدد بازه‌ای نیست، زیرا کران بالای بازه از کران پایین بازه کوچک‌تر است. پس جواب مثال بالا نادرست است.

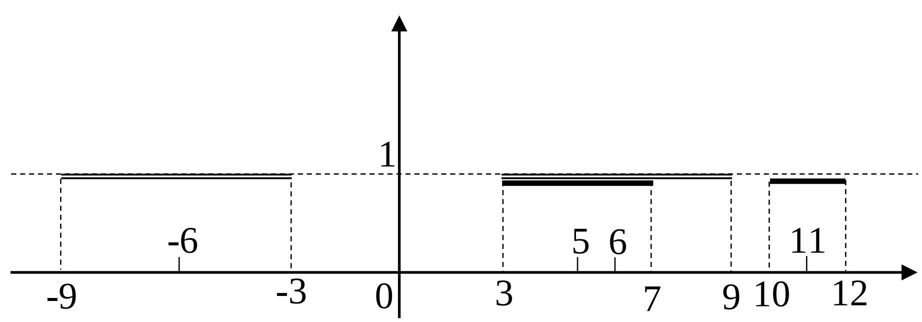
نکته: تفریق دو عدد بازه‌ای $A=[a_1 \quad a_2]$ و $B=[b_1 \quad b_2]$ را به صورت $A-B=[a_1-b_2 \quad a_2-b_1]$ تعریف می‌کنیم.

بنابراین برای تفریق دو عدد بازه‌ای $A=[3 \quad 7]$ و $B=[10 \quad 12]$ داریم:

$$A-B=[3 \quad 7]-[10 \quad 12]=[3-12 \quad 7-10]=[-9 \quad -3]$$

یا

$$B-A=[10 \quad 12]-[3 \quad 7]=[10-7 \quad 12-3]=[3 \quad 9]$$



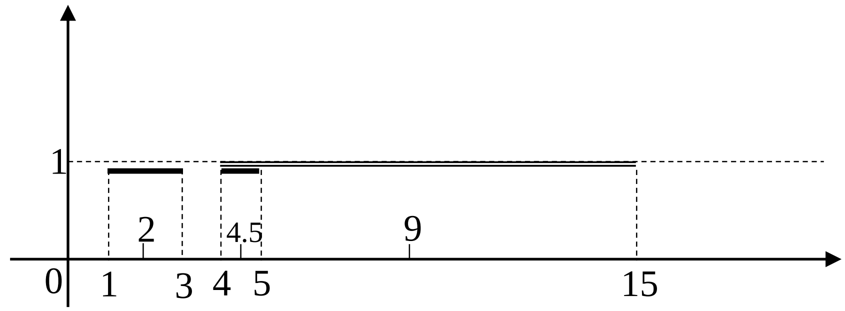
ضرب اعداد بازه‌ای:

سؤال: آیا ضرب دو عدد بازه‌ای $A=[a_1 \quad a_2]$ و $B=[b_1 \quad b_2]$ به صورت $A+B=[a_1\times b_1 \quad a_2\times b_2]$ صحیح می‌باشد؟

جواب: به شرط هم‌علامت‌بودن اعداد a_1 ، a_1 ، b_1 و b_2 صحیح می‌باشد.

مثال: حاصل‌ضرب دو عدد بازه‌ای $A=[1 \quad 3]$ و $B=[4 \quad 5]$ را به صورت نموداری نشان دهید.

$$A\times B=[1 \quad 3]\times[4 \quad 5]=[1\times 4 \quad 3\times 5]=[4 \quad 15]$$



مثال: دو عدد بازه‌ای $A=[-2 \quad -1]$ و $B=[-1 \quad 5]$ را در هم ضرب کنید.

$$A\times B=[-2 \quad -1]\times[-1 \quad 5]=[(-2)\times(-1) \quad (-1)\times 5]=[2 \quad -5]$$

عدد $[2 \quad -5]$ یک عدد بازه‌ی نیست، زیرا کران بالای بازه از کران پایین بازه کوچک‌تر است. پس جواب مثال بالا نادرست است.

تقسیم اعداد بازه‌ای:

سؤال: آیا تقسیم دو عدد بازه‌ای $A=[a_1 \quad a_2]$ و $B=[b_1 \quad b_2]$ به صورت $\frac{A}{B}=\left[\frac{a_1}{b_1} \quad \frac{a_2}{b_2}\right]$ صحیح می‌باشد؟

جواب: به شرط هم‌علامت‌بودن اعداد a_1 ، a_1 ، b_1 و b_2 صحیح می‌باشد.

فرمول نهایی و کلی برای همه‌ی عملگرها:

* را نماد هر عملگر، $\wedge$ را نماد حداقل و $\vee$ را نماد حداکثر در نظر می‌گیریم.

$$A*B=[(a_1*b_1)\wedge(a_1*b_2)\wedge(a_2*b_1)\wedge(a_2*b_2) \quad (a_1*b_1)\vee(a_1*b_2)\vee(a_2*b_1)\vee(a_2*b_2)]$$

یا

$$A*B=[\min[(a_1*b_1),(a_1*b_2),(a_2*b_1),(a_2*b_2)] \quad \max[(a_1*b_1),(a_1*b_2),(a_2*b_1),(a_2*b_2)]]$$

مثال: حاصل‌ضرب دو عدد بازه‌ای $A=[-2 \quad -1]$ و $B=[-1 \quad 5]$ را حساب کنید.

$$A\times B=[-2 \quad -1]\times[-1 \quad 5]=[\min[2,-10,1,-5] \quad \max[2,-10,1,-5]]$$
$$=[-10 \quad 2]$$

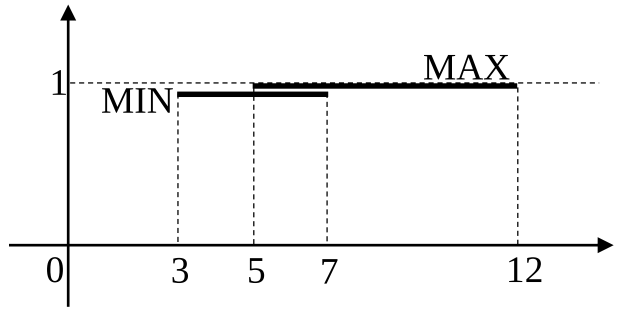
مثال: حاصل‌تقسیم دو عدد بازه‌ای $A=[3 \quad 7]$ و $B=[-1 \quad 2]$ را حساب کنید.

$$A\div B=[3 \quad 7]\div[-1 \quad 2]=[\min[-3,1.5,-7,3.5] \quad \max[-3,1.5,-7,3.5]]$$
$$=[-7 \quad 3.5]$$

مثال: مینیمم و ماکزیمم دو عدد بازه‌ای $A=[3 \quad 7]$ و $B=[5 \quad 12]$ را حساب کنید.

$$MIN(A,B)=MIN([3 \quad 7],[5 \quad 12])$$
$$=[\min[\min(3,5),\min(3,12),\min(7,5),\min(7,12)] \quad \max[\min(3,5),\min(3,12),\min(7,5),\min(7,1$$
$$=[3 \quad 7]$$

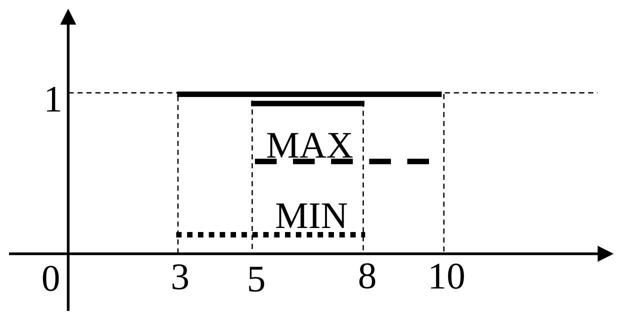
$$MAX(A,B)=MAX([3 \quad 7],[5 \quad 12])$$
$$=[\min[\max(3,5),\max(3,12),\max(7,5),\max(7,12)] \quad \max[\max(3,5),\max(3,12),\max(7,5),\max(7 \quad)]]$$
$$=[5 \quad 12]$$



مثال: مینیمم و ماکزیمم دو عدد بازه‌ای $A=[3\quad 10]$ و $B=[5\quad 8]$ را حساب کنید.

$$MIN(A,B)=MIN([3\quad 10],[5\quad 8])$$
$$=[\min[\min(3,5),\min(3,8),\min(10,5),\min(10,8)]\quad \max[\min(3,5),\min(3,8),\min(10,5),\min(10,8$$
$$=[3\quad 8]$$

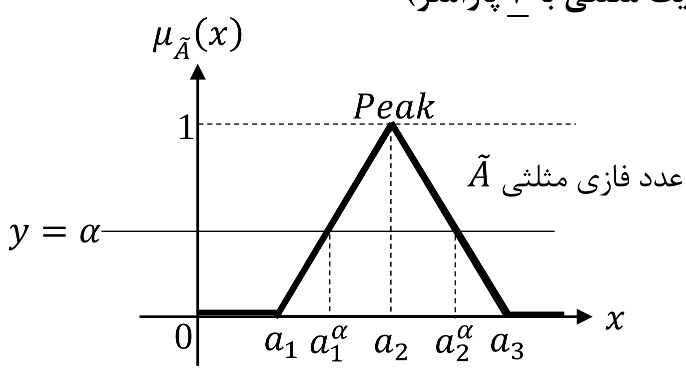
$$MAX(A,B)=MAX([3\quad 10],[5\quad 8])$$
$$=[\min[\max(3,5),\max(3,8),\max(10,5),\max(10,8)]\quad \max[\max(3,5),\max(3,8),\max(10,5),\max(1\quad)]]$$
$$=[5\quad 10]$$



اشکال معروف و پُرکاربرد اعداد فازی

تعریف عدد فازی: یک عدد فازی به صورت یک بازه تعریف می‌شود.

۱- عدد فازی مثلثی (تابع عضویت مثلثی با ۳ پارامتر)



تعریف عدد فازی مثلثی:

$$\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)\quad,\quad \tilde{A}_{0^+}=Supp(\tilde{A})=[a_1\quad a_3]\quad,\quad \tilde{A}_1=Core(\tilde{A})=a_2$$

$$\text{(تابع عضویت مثلثی)}\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0 & x\le a_1\\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1\le x\le a_2\\ \dfrac{x-a_3}{a_2-a_3} & a_2\le x\le a_3\\ 0 & x\ge a_3\end{cases}$$

نکته: مجموعه‌های فازی همواره یک مقدار تعلق حداکثری دارند و چون نرمال می‌باشند $(h(\tilde{A})=1)$، این مقدار تعلق حداکثری برابر با ۱ می‌باشد. در مجموعه اعداد فازی مثلثی، میزان تعلق حداکثری ۱ در نقطه‌ی a_2 اتفاق می‌افتد.

نکته: مجموعه‌های فازی همواره یک مجموعه‌ی ساپورت $(Supp(\tilde{A}))$ دارند. مجموعه‌ی ساپورت a_1^α و a_2^α یک عدد فازی را معرفی می‌کند.

$$\tilde{A}_\alpha=[a_1^\alpha\quad a_2^\alpha]=\{x\mid \mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\}$$

$$y=\alpha=\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\Longrightarrow x=a_1^\alpha=\alpha(a_2-a_1)+a_1$$

$$y=\alpha=\frac{x-a_3}{a_2-a_3}\Longrightarrow x=a_2^\alpha=\alpha(a_2-a_3)+a_3$$

$$\tilde{A}_\alpha=[a_1^\alpha\quad a_2^\alpha]=[\alpha(a_2-a_1)+a_1\quad \alpha(a_2-a_3)+a_3]$$

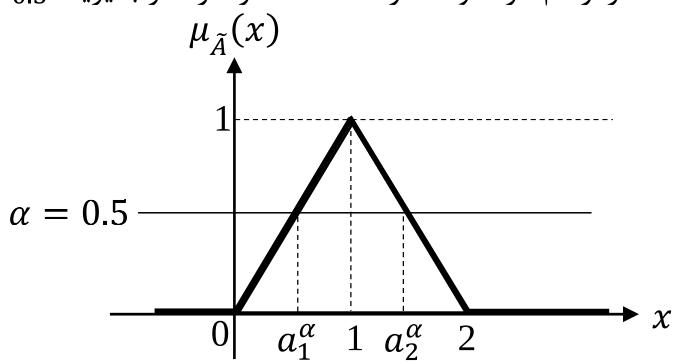
اگر در فرمول فوق، به جای α به ترتیب مقادیر 0 و 1 را قرار بدهیم، بدست می‌آید:

$$\tilde{A}_0=[a_1\quad a_3]$$

$$\tilde{A}_1=[a_2\quad a_2]=a_2$$

مثال: عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(0\,,1\,,2)$ را رسم کرده و مقدار $\alpha=0.5$ را در نظر بگیرید. $\tilde{A}_{0.5}$ را محاسبه کنید.

جواب:

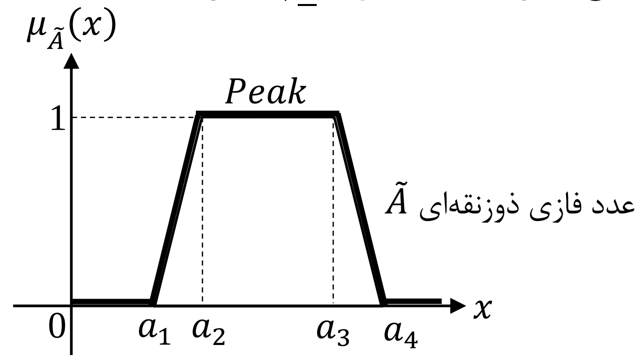


$$\tilde{A}_\alpha=[a_1^\alpha\quad a_2^\alpha]=[\alpha(a_2-a_1)+a_1\quad \alpha(a_2-a_3)+a_3]$$

$$a_1=0\ ,\ a_2=1\ ,\ a_3=2$$

$$\tilde{A}_{0.5}=[0.5(1-0)+0\quad 0.5(1-2)+2]=[0.5\quad 1.5]$$

۲- عدد فازی ذوزنقه‌ای (تابع عضویت ذوزنقه‌ای با ۴ پارامتر)



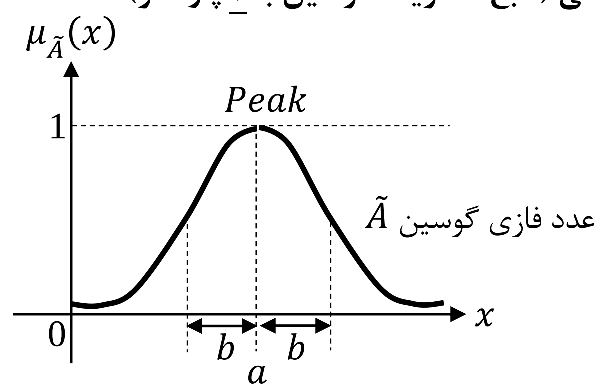
تعریف عدد فازی ذوزنقه‌ای:

$$\tilde{A} = (a_1 , a_2 , a_3 , a_4) \quad , \quad \tilde{A}_{0^+} = Supp(\tilde{A}) = [a_1 \quad a_4] \quad , \quad \tilde{A}_1 = Core(\tilde{A}) = [a_2 \quad a_3]$$

$$\text{(تابع عضویت ذوزنقه‌ای)}\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{x - a_4}{a_3 - a_4} & a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & x \ge a_4 \end{cases}$$

نکته: عدد فازی ذوزنقه‌ای نسبت به عدد فازی مثلثی پایدارتر است؛ چون عدد فازی مثلثی در یک نقطه مقدار حداکثر دارد، اما در عدد فازی ذوزنقه‌ای در یک بازه مقدار حداکثر وجود دارد.

۳- عدد فازی گوسین یا گوسی (تابع عضویت گوسین با ۲ پارامتر)



a تعیین‌کننده‌ی محل مرکز قله و b تعیین‌کننده‌ی میزان کشیدگی یا پهن‌شدگی منحنی است.

تعریف عدد فازی گوسین:

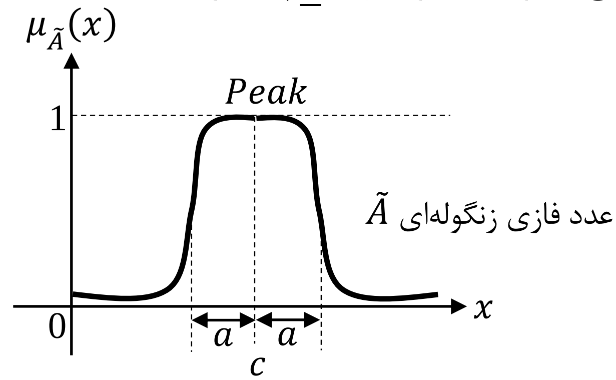
$$\tilde{A} = (a , b)$$

$$\text{(تابع عضویت گوسین)}\ \mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} = e^{\frac{-(x-a)^2}{2b^2}} = \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2b^2}\right)$$

عیب عدد فازی گوسین: هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسد (هیچ عددی تعلق صفر ندارد).

مزایای عدد فازی گوسین
۱- مشتق آن ساده بوده و فرم خودش را دارد.
۲- از تابع توزیع نرمال استفاده می‌کند.

۴- عدد فازی زنگوله‌ای (تابع عضویت زنگوله‌ای با ۳ پارامتر)



c تعیین‌کننده‌ی محل مرکز قله، a تعیین‌کننده‌ی میزان کشیدگی یا پهن‌شدگی نمودار و b تعیین‌کننده‌ی میزان قوس منحنی است.

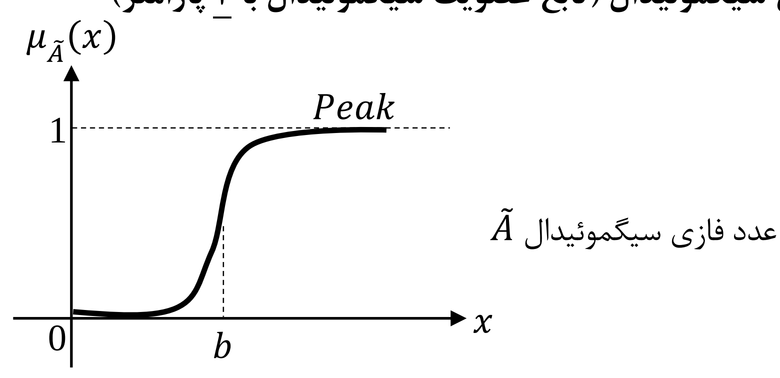
تعریف عدد فازی زنگوله‌ای:

$$\tilde{A} = (a\,, b\,, c)$$

$$\text{(تابع عضویت زنگوله‌ای)}\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

نکته: در جاهایی که مبتنی بر دانش انسان است (پایگاه داده‌ی مبتنی بر دانش انسان) بیشتر از ساختارهای مثلثی یا ذوزنقه‌ای استفاده می‌کنیم و در جاهایی که مبتنی بر دانش انسانی نیست (به صورت زیاد)، از تابع عضویت گوسین و زنگوله‌ای استفاده می‌کنیم.

۵- عدد فازی سیگموئیدال (تابع عضویت سیگموئیدال با ۲ پارامتر)



نکته: با زیادشدن مقدار a ، شیب تابع عضویت سیگموئیدال زیاد شده و با کم‌شدن مقدار a ، شیب تابع عضویت سیگموئیدال کمتر می‌شود. اگر a بی‌نهایت شود، تابع عضویت سیگموئیدال تبدیل به تابع پله‌ای می‌شود.

تعریف عدد فازی سیگموئیدال:

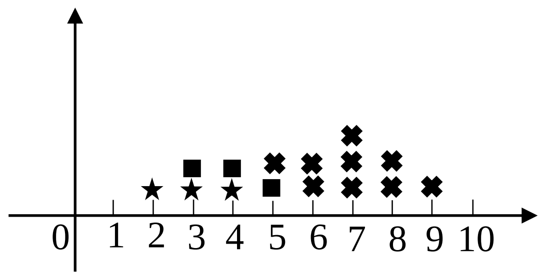
$\tilde{A} = (a\,, b)$

$$\text{(تابع عضویت سیگموئیدال)}\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}$$

جمع مجموعه‌های کلاسیک

مثال: دو مجموعه‌ی کلاسیک $A = \{2,3,4\}$ و $B = \{3,4,5\}$ را با هم جمع کنید.

$A + B = \{2,3,4\} + \{3,4,5\} = \{5,6,7,8,9\}$



عملیات ریاضی بر روی مجموعه‌های فازی

فرض می‌کنیم علامت * بیانگر عملیات ریاضی بین دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ $(\tilde{C} = \tilde{A}(*)\tilde{B})$ ، و x متغیر مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ ، و y متغیر مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ ، و z متغیر مجموعه‌ی فازی $\tilde{C}$ باشد، بنابراین داریم:

$z = (x_1 + y_1)\ or\ (x_2 + y_2)\ or \dots or\ (x_n + y_n)$

$\mu_{\tilde{C}}(z) = \max[min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{B}}(y_1)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(x_2), \mu_{\tilde{B}}(y_2)]\,, \dots, min[\mu_{\tilde{A}}(x_n), \mu_{\tilde{B}}(y_n)]]$

مثال: دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{(2\,, 0.6), (3\,, 1), (4\,, 0.4)\}$ و $\tilde{B} = \{(3\,, 0.5), (4\,, 0.8), (5\,, 0.2)\}$ را با هم جمع کنید.

① $if\ z < 5 \Longrightarrow \mu_{\tilde{Z}}(x) = 0$

② $if\ z = 5 \Longrightarrow z = 2 + 3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(5)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(3)]] = \max[min[0.6\,, 0.5]] = 0.5 \Longrightarrow (5\,, 0.5)$

③ $if\ z = 6 \Longrightarrow z = 2 + 4 = 3 + 3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(6)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(4)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(3)]]$
$= \max[min[0.6\,, 0.8]\,, min[1\,, 0.5]] = \max[0.6\,, 0.5] = 0.6 \Longrightarrow (6\,, 0.6)$

④ $if\ z = 7 \Longrightarrow z = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(7)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(5)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(4)]\,, min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(3)]]$
$= \max[min[0.6\,, 0.2]\,, min[1\,, 0.8]\ , min[0.4\,, 0.5]] = \max[0.2\,, 0.8\,, 0.4] = 0.8$
$\Longrightarrow (7\,, 0.8)$

⑤ $if\ z = 8 \Longrightarrow z = 3 + 5 = 4 + 4 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(8)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(5)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(4)]]$
$= \max[min[1\,, 0.2]\,, min[0.4\,, 0.8]] = \max[0.2\,, 0.4] = 0.4 \Longrightarrow (8\,, 0.4)$

⑥ $if\ z = 9 \Longrightarrow z = 4 + 5 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(9)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(5)]] = \max[min[0.4 , 0.2]] = 0.2 \Longrightarrow (9 , 0.2)$

$\tilde{C} = \tilde{A}(+)\tilde{B} = \{(5 , 0.5), (6 , 0.6), (7 , 0.8), (8 , 0.4), (9 , 0.2)\}$

مثال: دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{(2 , 0.6), (3 , 1), (4 , 0.4)\}$ و $\tilde{B} = \{(3 , 0.5), (4 , 0.8), (5 , 0.2)\}$ را از هم تفریق کنید.

① $if\ z < -3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{Z}}(x) = 0$

② $if\ z = -3 \Longrightarrow z = 2 - 5 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(-3)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(5)]] = \max[min[0.6 , 0.2]] = 0.2 \Longrightarrow (-3 , 0.2)$

③ $if\ z = -2 \Longrightarrow z = 2 - 4 = 3 - 5 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(-2)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(4)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(5)]]$
$= \max[min[0.6 , 0.8] , min[1 , 0.2]] = \max[0.6 , 0.2] = 0.6 \Longrightarrow (-2 , 0.6)$

④ $if\ z = -1 \Longrightarrow z = 2 - 3 = 3 - 4 = 4 - 5 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(-1)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(3)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(4)] , min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(5)]]$
$= \max[min[0.6 , 0.5] , min[1 , 0.8]\ , min[0.4 , 0.2]] = \max[0.5 , 0.8 , 0.2] = 0.8$
$\Longrightarrow (-1 , 0.8)$

⑤ $if\ z = 0 \Longrightarrow z = 3 - 3 = 4 - 4 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(0)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(3)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(4)]]$
$= \max[min[1 , 0.5] , min[0.4 , 0.8]] = \max[0.5 , 0.4] = 0.5 \Longrightarrow (0 , 0.5)$

⑥ $if\ z = 1 \Longrightarrow z = 4 - 3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(1)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(3)]] = \max[min[0.4 , 0.5]] = 0.4 \Longrightarrow (1 , 0.4)$

$\tilde{C} = \tilde{A}(-)\tilde{B} = \{(-3 , 0.2), (-2 , 0.6), (-1 , 0.8), (0 , 0.5), (1 , 0.4)\}$

مثال: دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{(2 , 0.6), (3 , 1), (4 , 0.4)\}$ و $\tilde{B} = \{(3 , 0.5), (4 , 0.8), (5 , 0.2)\}$ را در هم ضرب کنید.

① $if\ z < 6 \Longrightarrow \mu_{\tilde{Z}}(x) = 0$

② $if\ z = 6 \Longrightarrow z = 2 \times 3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(6)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(3)]] = \max[min[0.6 , 0.5]] = 0.5 \Longrightarrow (6 , 0.5)$

③ $if\ z = 8 \Longrightarrow z = 2 \times 4 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(8)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(4)]] = \max[min[0.6 , 0.8]] = 0.6 \Longrightarrow (8 , 0.6)$

④ $if\ z = 9 \Longrightarrow z = 3 \times 3 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(9)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(3)]] = \max[min[1 , 0.5]\ ] = 0.5 \Longrightarrow (9 , 0.5)$

⑤ $if\ z = 10 \Longrightarrow z = 2 \times 5 \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(10)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(5)]] = \max[min[0.6 , 0.2]] = 0.2 \Longrightarrow (10 , 0.2)$

⑥ $if\ z = 12 \Rightarrow z = 3 \times 4 = 4 \times 3 \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}(12)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(4)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(3)]]$
$= \max[min[1\ , 0.8]\ , min[0.4\ , 0.5]] = \max[0.8\ , 0.4] = 0.8 \Rightarrow (12\ , 0.8)$

⑦ $if\ z = 15 \Rightarrow z = 3 \times 5 \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}(15)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(5)]] = \max[min[1\ , 0.2]] = 0.2 \Rightarrow (15\ , 0.2)$

⑧ $if\ z = 16 \Rightarrow z = 4 \times 4 \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}(16)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(4)]] = \max[min[0.4\ , 0.8]] = 0.4 \Rightarrow (16\ , 0.4)$

⑨ $if\ z = 20 \Rightarrow z = 4 \times 5 \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}(20)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(5)]] = \max[min[0.4\ , 0.2]] = 0.2 \Rightarrow (20\ , 0.2)$

$\tilde{C} = \tilde{A}(\times)\tilde{B}$
$= \{(6\ , 0.5), (8\ , 0.6), (9\ , 0.5), (10\ , 0.2), (12\ , 0.8), (15\ , 0.2), (16\ , 0.4), (20\ , 0.2)\}$

مثال: مینیمم دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{(2\ , 0.6), (3\ , 1), (4\ , 0.4)\}$ و $\tilde{B} = \{(3\ , 0.5), (4\ , 0.8), (5\ , 0.2)\}$ را بیابید.

① $if\ z < 2 \Rightarrow \mu_{\tilde{Z}}(x) = 0$

② $if\ z = 2 \Rightarrow z = MIN(2\ , 3) = MIN(2\ , 4) = MIN(2\ , 5) \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}(2)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(3)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(4)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(5)]]$
$= \max[min[0.6\ , 0.5]\ , min[0.6\ , 0.8]\ , min[0.6\ , 0.2]] = \max[0.5\ , 0.6\ , 0.2]$
$= 0.6 \Rightarrow (2\ , 0.6)$

③ $if\ z = 3 \Rightarrow z = MIN(3\ , 3) = MIN(3\ , 4) = MIN(3\ , 5) = MIN(4\ , 3) \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}(3)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(3)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(4)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(5)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(3)]]$
$= \max[min[1\ , 0.5]\ , min[1\ , 0.8]\ , min[1\ , 0.2]\ , min[0.4\ , 0.5]] = \max[0.5\ , 0.8\ , 0.2\ , 0.4]$
$= 0.8 \Rightarrow (3\ , 0.8)$

④ $if\ z = 4 \Rightarrow z = MIN(4\ , 4) = MIN(4\ , 5) \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}(4)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(4)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{B}}(5)]]$
$= \max[min[0.4\ , 0.8]\ , min[0.4\ , 0.2]] = \max[0.4\ , 0.2] = 0.4 \Rightarrow (4\ , 0.4)$

$\tilde{C} = MIN(\tilde{A}\ , \tilde{B}) = \{(2\ , 0.6), (3\ , 0.8), (4\ , 0.4)\}$

مثال: ماکزیمم دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{(2\ , 0.6), (3\ , 1), (4\ , 0.4)\}$ و $\tilde{B} = \{(3\ , 0.5), (4\ , 0.8), (5\ , 0.2)\}$ را بیابید.

① $if\ z = 2 \Rightarrow \mu_{\tilde{Z}}(x) = 0$

② $if\ z = 3 \Rightarrow z = MAX(2\ , 3) = MAX(3\ ,3) \Rightarrow \mu_{\tilde{C}}(3)$
$= \max[min[\mu_{\tilde{A}}(2), \mu_{\tilde{B}}(3)]\ , min[\mu_{\tilde{A}}(3), \mu_{\tilde{B}}(3)]]$
$= \max[min[0.6\ , 0.5]\ , min[1\ , 0.5]] = \max[0.5\ , 0.5] = 0.5 \Rightarrow (3\ , 0.5)$

③ $if\ z=4 \Longrightarrow z=MAX(2\ ,4)=MAX(3\ ,4)=MAX(4\ ,3)=MAX(4\ ,4) \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(4)$
$=\max[min[\mu_{\tilde{A}}(2),\mu_{\tilde{B}}(4)]\ ,min[\mu_{\tilde{A}}(3),\mu_{\tilde{B}}(4)]\ ,min[\mu_{\tilde{A}}(4),\mu_{\tilde{B}}(3)]\ ,min[\mu_{\tilde{A}}(4),\mu_{\tilde{B}}(4)]]$
$=\max[min[0.6\ ,0.8]\ ,min[1\ ,0.8]\ ,min[0.4\ ,0.5]\ ,min[0.4\ ,0.8]]$
$=\max[0.6\ ,0.8\ ,0.4\ ,0.4]=0.8 \Longrightarrow (4\ ,0.8)$

④ $if\ z=5 \Longrightarrow z=MAX(2\ ,5)=MAX(3\ ,5)=MAX(4\ ,5) \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}(5)$
$=\max[min[\mu_{\tilde{A}}(2),\mu_{\tilde{B}}(5)]\ ,min[\mu_{\tilde{A}}(3),\mu_{\tilde{B}}(5)]\ ,min[\mu_{\tilde{A}}(4),\mu_{\tilde{B}}(5)]]$
$=\max[min[0.6\ ,0.2]\ ,min[1\ ,0.2]\ ,min[0.4\ ,0.2]]=\max[0.2\ ,0.2\ ,0.2]=0.2$
$\Longrightarrow (5\ ,0.2)$

$\tilde{C}=MAX(\tilde{A}\ ,\tilde{B})=\{(3\ ,0.5),(4\ ,0.8),(5\ ,0.2)\}$

نکته: معکوس عدد بازه‌ای

$$A^{-1}=\frac{1}{A}=\frac{[1\quad 1]}{[a_1\quad a_2]}=[\frac{1}{a_2}\quad \frac{1}{a_1}]$$

مثال: معکوس عدد بازه‌ای $A=[2\quad 4]$ را بیابید.

$$A^{-1}=\frac{1}{A}=\frac{[1\quad 1]}{[2\quad 4]}=[\frac{1}{4}\quad \frac{1}{2}]$$

نکته: معکوس مجموعه‌ی فازی

$$\tilde{A}^{-1}=\frac{1}{\tilde{A}}=\frac{\{(1\ ,1)\}}{\tilde{A}}$$

مثال: معکوس مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}=\{(2\ ,0.6),(3\ ,1),(4\ ,0.8)\}$ را بیابید.

① $if\ y=\frac{1}{x} \Longrightarrow y=\frac{1}{2} \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}\left(\frac{1}{2}\right)=\max[min[\mu_{\tilde{A}}(2)]]=\max[min[0.6]]=0.6 \Longrightarrow (\frac{1}{2}\ ,0.6)$

② $if\ y=\frac{1}{x} \Longrightarrow y=\frac{1}{3} \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}\left(\frac{1}{3}\right)=\max[min[\mu_{\tilde{A}}(3)]]=\max[min[1]]=1 \Longrightarrow (\frac{1}{3}\ ,1)$

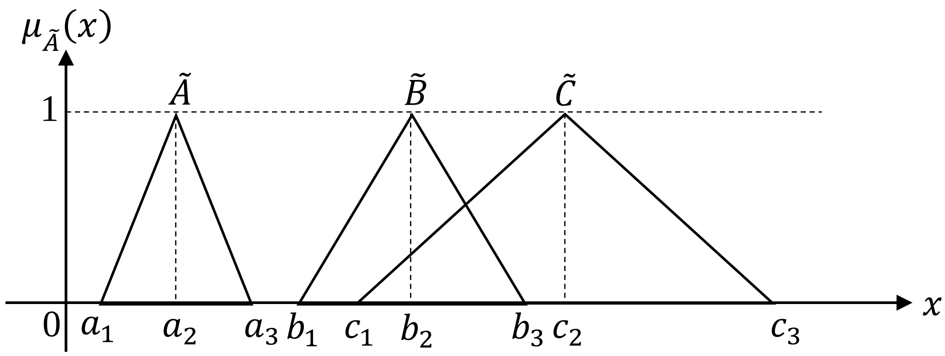
③ $if\ y=\frac{1}{x} \Longrightarrow y=\frac{1}{4} \Longrightarrow \mu_{\tilde{C}}\left(\frac{1}{4}\right)=\max[min[\mu_{\tilde{A}}(4)]]=\max[min[0.8]]=0.8 \Longrightarrow (\frac{1}{4}\ ,0.8)$

$$\tilde{A}^{-1}=\frac{1}{\tilde{A}}=\frac{\{(1\ ,1)\}}{\tilde{A}}=\frac{\{(1\ ,1)\}}{\{(2\ ,0.6),(3\ ,1),(4\ ,0.8)\}}=\{\left(\frac{1}{2}\ ,0.6\right),\left(\frac{1}{3}\ ,1\right),\left(\frac{1}{4}\ ,0.8\right)\}$$

عملیات ریاضی بر روی اعداد فازی

حاصل‌جمع دو عدد فازی مثلثی

فرض می‌کنیم حاصل‌جمع دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(a_1\ ,a_2\ ,a_3)$ و $\tilde{B}=(b_1\ ,b_2\ ,b_3)$ برابر با $\tilde{C}=(c_1\ ,c_2\ ,c_3)$ باشد.



قبلاً گفتیم که طبق اصل تجزیه‌ی مجموعه‌های فازی داریم:

$$\tilde{A} = \cup \alpha A_\alpha \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

اگر مجموعه‌ی فازی $\tilde{A} = \{(1\,,0.2),(2\,,0.4),(3\,,1),(4\,,0.2)\}$ را داشته باشیم، آن‌گاه داریم:

$$if\ (\alpha = 0.2) \Longrightarrow A_\alpha = A_{0.2} = \{1\,,2\,,3\,,4\} \quad ,$$
$$\alpha A_\alpha = 0.2A_{0.2} = \{(1\,,0.2),(2\,,0.2),(3\,,0.2),(4\,,0.2)\}$$

$$if\ (\alpha = 0.4) \Longrightarrow A_\alpha = A_{0.4} = \{2\,,3\} \quad , \quad \alpha A_\alpha = 0.4A_{0.4} = \{(2\,,0.4),(3\,,0.4)\}$$

$$if\ (\alpha = 1) \Longrightarrow A_\alpha = A_1 = \{3\} \quad , \quad \alpha A_\alpha = 1A_1 = \{(3\,,1)\}$$

می‌خواهیم دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را که در نمودار صفحه‌ی قبل نشان داده شده است با هم جمع کنیم. می‌دانیم که بین بازه‌های $[a_1 \quad a_3]$ و $[b_1 \quad b_3]$ که بازه‌های پیوسته‌ای هستند، بی‌نهایت عدد وجود دارد. بنابراین می‌بایست این بی‌نهایت عددی که بین بازه‌های مذکور وجود دارند را به ترتیب با هم جمع نموده و نقطه‌ی حاصل‌جمع را بر روی نمودار مشخص کنیم تا در نهایت شکل نهایی بدست آید که عملاً کار غیرممکنی است؛ لذا تعدادی از نقاط خاص از این بازه‌ها را انتخاب کرده و با هم جمع نموده و نقطه‌ی حاصل‌جمع را بر روی نمودار مشخص می‌کنیم. سپس نقاط مشخص‌شده بر روی نمودار را به هم وصل می‌کنیم تا شکل حاصل‌جمع تقریباً مشخص شود.

طبق فرمول $\tilde{A}_\alpha = [\alpha(a_2 - a_1) + a_1 \quad \alpha(a_2 - a_3) + a_3]$ داریم:

$$\tilde{A}_0 = [0 \times (a_2 - a_1) + a_1 \quad 0 \times (a_2 - a_3) + a_3] = [a_1 \quad a_3]$$

$$\tilde{B}_0 = [0 \times (b_2 - b_1) + b_1 \quad 0 \times (b_2 - b_3) + b_3] = [b_1 \quad b_3]$$

$$① \ \tilde{C}_0 = (A_0\widetilde{(+)}B_0) = \tilde{A}_0(+)\tilde{B}_0 = [a_1 + b_1 \quad a_3 + b_3]$$

$$\tilde{A}_1 = [1 \times (a_2 - a_1) + a_1 \quad 1 \times (a_2 - a_3) + a_3] = [a_2 \quad a_2]$$

$$\tilde{B}_1 = [1 \times (b_2 - b_1) + b_1 \quad 1 \times (b_2 - b_3) + b_3] = [b_2 \quad b_2]$$

$$② \ \tilde{C}_1 = (A_1\widetilde{(+)}B_1) = \tilde{A}_1(+)\tilde{B}_1 = [a_2 + b_2 \quad a_2 + b_2] = [a_2 + b_2]$$

① و ② و $\tilde{C} = (c_1\,,c_2\,,c_3) \Longrightarrow c_1 = a_1 + b_1 \quad , \quad c_2 = a_2 + b_2 \quad , \quad c_3 = a_3 + b_3$

$$\tilde{C} = \tilde{A}(+)\tilde{B} = (a_1 + b_1\,,a_2 + b_2\,,a_3 + b_3)$$

حاصل‌تفریق دو عدد فازی مثلثی

حاصـــل‌تفریق دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a_1 , a_2 , a_3)$ و $\tilde{B} = (b_1 , b_2 , b_3)$ برابر با $\tilde{D} = (d_1 , d_2 , d_3)$ است که همانند حاصل‌جمع دو عدد فازی مثلثی به صورت زیر حساب می‌شود:

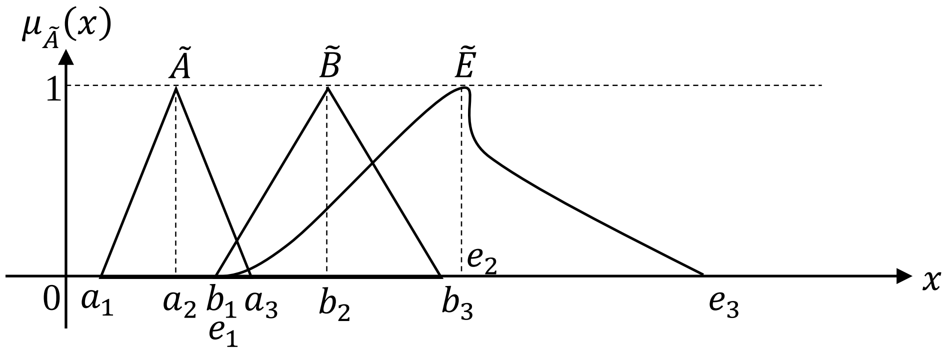
$$\tilde{D} = \tilde{A}(-)\tilde{B} = (a_1 - b_3 , a_2 - b_2 , a_3 - b_1)$$

نکته: حاصل‌جمع و حاصل‌تفریق دو عدد فازی مثلثی، یک عدد فازی مثلثی است.

نکته: حاصـل‌ضـرب و حاصـل‌تقسـیم دو عدد فازی مثلثی، یک عدد فازی مثلثی نیسـت؛ ولیکن به عنوان یک تقریب می‌توان فرض نمود که حاصل یک عدد فازی مثلثی است و مؤلفه‌های آن به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\tilde{E} = \tilde{A} \times \tilde{B} = (a_1 \times b_1 , a_2 \times b_2 , a_3 \times b_3)$$

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = (\frac{a_1}{b_3} , \frac{a_2}{b_2} , \frac{a_3}{b_1})$$

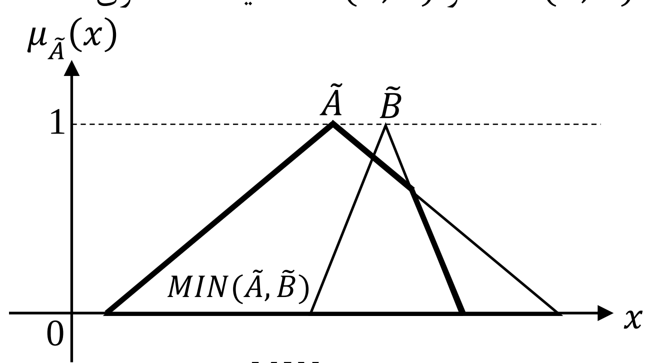


$$e_1 = a_1 b_1 \quad , \quad e_2 = a_2 b_2 \quad , \quad e_3 = a_3 b_3$$

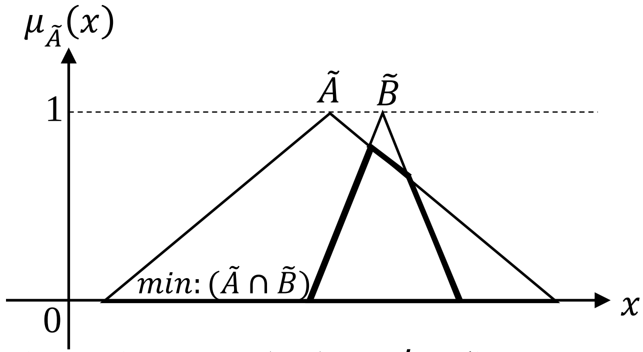
نکته: مقدار مینیمم و ماکزیمم دو عدد فازی مثلثی، الزاماً یک عدد فازی مثلثی نیست.

نکته: عملگرهای min و max روی اعداد حقیقی، و عملگرهای MIN و MAX روی اعداد فازی تعریف می‌شوند.

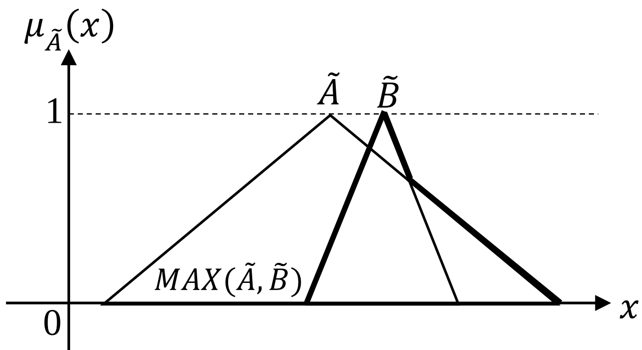
نکته: اثبات شده است که حاصل $MIN(\tilde{A}, \tilde{B})$ و $MAX(\tilde{A}, \tilde{B})$ یک عدد فازی است.



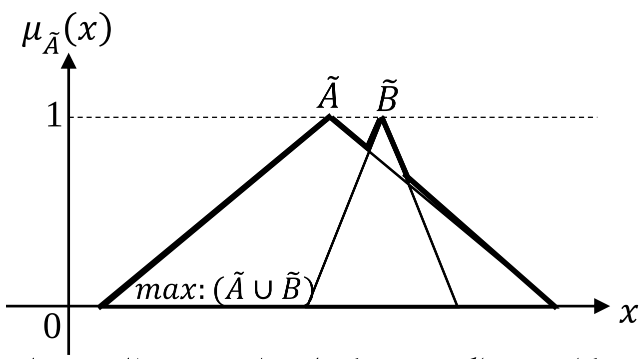
(شکل الف) عملگر MIN دو عدد فازی



(شکل ب) عملگر min که اشتراک دو عدد فازی می‌باشد



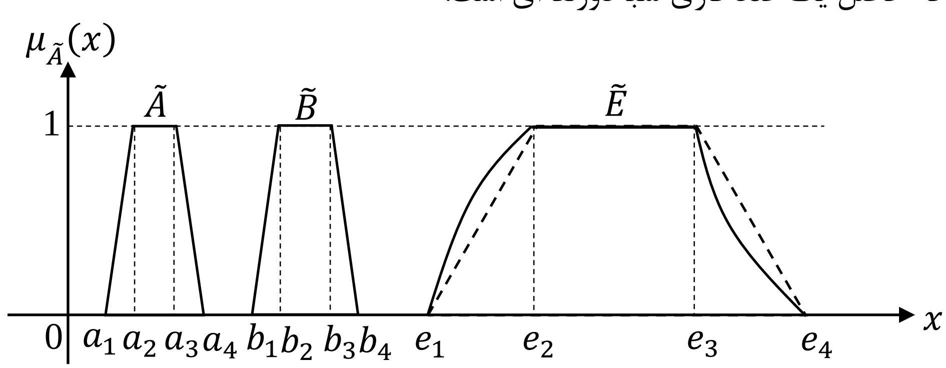
(شکل ج) عملگر MAX دو عدد فازی



(شکل د) عملگر max که اجتماع دو عدد فازی می‌باشد

نکته: حاصل‌جمع و حاصل‌تفریق دو عدد فازی ذوزنقه‌ای، یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است.

نکته: حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم دو عدد فازی ذوزنقه‌ای، یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نیست؛ ولیکن به عنوان یک تقریب می‌توان فرض نمود که حاصل یک عدد فازی شبه‌ذوزنقه‌ای است.



نکته: مقدار مینیمم و ماکزیمم دو عدد فازی ذوزنقه‌ای، الزاماً یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نیست.

تئوری احتمال (Probability Theory)

مثال: در پرتاب یک تاس، احتمال پیشامدهای $A = \{1\}$ ، $B = \{1 , 2\}$ و $A \cup B$ چقدر است؟

جواب: فضای نمونه (Sample Space) در پرتاب تاس $S = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ می‌باشد. بنابراین احتمال پیشامدهای $A = \{1\}$ ، $B = \{1 , 2\}$ ، $C = \{3 , 4\}$ و $B \cup C$ به صورت زیر می‌باشد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$B \cup C = \{1 , 2 , 3 , 4\}$$

$$P(B \cup C) = \frac{n(B \cup C)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad P(B \cup C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

نکته: $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$

نکته: $0 \leq P(A) \leq 1$

نکته: اگر پیشامدهای $\mathrm{A}_1 , \mathrm{A}_2 , \ldots , \mathrm{A}_n$ دو به دو با هم ناسازگار باشند (اشتراک نداشته باشند)، احتمال اجتماع این پیشامدها معادل با مجموع احتمال‌های هر پیشامد است.

$$\forall\ \mathrm{i,j} \quad \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \phi \quad : \quad P\left(\bigcup_i \mathrm{A}_i\right) = \sum_i P(\mathrm{A}_i)$$

نکته: اگر پیشامدهای $\mathrm{A}_1 , \mathrm{A}_2 , \ldots , \mathrm{A}_n$ دو به دو با هم ناسازگار باشند (اشتراک نداشته باشند)، احتمال اشتراک این پیشامدها معادل با ضرب احتمال‌های هر پیشامد است.

$$\forall\ \mathrm{i,j} \quad \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \phi \quad : \quad P\left(\bigcap_i \mathrm{A}_i\right) = \prod_i P(\mathrm{A}_i)$$

$$if \left(\bigcup_i \mathrm{A}_i = S\right) \quad : \quad P\left(\bigcup_i \mathrm{A}_i\right) = 1$$

تئوری امکان (Possibility Theory)

تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ را می‌توان به عنوان تابع توزیع امکان برای مجموعه‌ی A روی مجموعه‌ی جهانی X تعریف کرد. امکان عنصر x به عنوان $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مشخص می‌شود و این امکان‌ها مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را تعریف می‌کنند.

ما می‌دانیم که توزیع احتمال P روی فضـای نمونه‌ی S تعریف می‌شود و مجموع این احتمال‌ها می‌بایست با مقدار ۱ مســاوی باشــد. در همین حال، توزیع امکان روی یک مجموعه‌ی جهانی X تعریف می‌شــود، اما محدودیتی برای مجموع این امکان‌ها وجود ندارد.

$$0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$$

$$\sum_{i} \mu_{\tilde{A}_i}(x) \longrightarrow \text{نامحدود}$$

مثال: عبارت «شخصی در صبحانه X تخم‌مرغ می‌خورد» را در نظر بگیرید.

$$X = \{1\,,2\,,\ldots\}$$

یک تابع توزیع امکان و همین‌طور یک تابع توزیع احتمال برای X قابل ارائه است. تابع توزیع امکان $\mu_{\tilde{x}}(u)$ می‌تواند به عنوان «درجه‌ی آسـان‌بودن خوردن u تخم‌مرغ در صـبحانه» تعبیر شـود، در حالی‌که توزیع احتمال $P_x(u)$ زمانی بدست می‌آید که مشـاهدات مربوط به خوردن تخم‌مرغ توسـط آن شخص، مثلاً برای ۱۰۰ روز جمع‌آوری و فراوانی‌ها محاسبه شوند. مقادیر $\mu_{\tilde{x}}(u)$ و $P_x(u)$ می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود.

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_{\tilde{x}}(u)$	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$P_x(u)$	0.7	0.2	0.1	0	0	0	0	0

نکته: امکان و احتمال یک چیز مشترک دارند: هر دوی آن‌ها عدم قطعیت را توصیف می‌کنند. امکان را می‌توان به عنوان کران بالای ارزش احتمال در نظر گرفت؛ یعنی امکان $\mu(A)$ و احتمال $P(A)$ یک پیشامد A رابطه‌ی زیر را دارند.

$$\mu(A) \geq P(A)$$

نکتــه: پس می‌توان نتیجه گرفت که بالابودن امکان دلیلی بر بالابودن احتمال نیســـت، اما بالابودن احتمال نشــــان‌دهنده‌ی بالابودن امکان وقوع پیشامد است.

نکته: اگر پیشـــامدهای $A_1\,,A_2\,,\ldots\,,A_n$ دو به دو با هم ناســـازگار باشـــند (اشـــتراک نداشـــته باشـــند)، امکان اجتماع این پیشامدها ارزش ماکزیمم را دارد.

$$\forall\ i,j \quad A_i \cap A_j = \phi \quad : \quad \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = max\big(\mu(A_i)\big)$$

نکته: اگر پیشـامدهای $A_1\,,A_2\,,\ldots\,,A_n$ دو به دو با هم ناسـازگار باشـند (اشـتراک نداشـته باشـند)، امکان اشـتراک این پیشامدها ارزش مینیمم را دارد.

$$\forall\ i,j \quad A_i \cap A_j = \phi \quad : \quad \mu\left(\bigcap_i A_i\right) = min\big(\mu(A_i)\big)$$

مفهوم ضرورت یا الزام (Necessity)

در حالی‌که در نظریه‌ی احتمال، تنها از یک عدد (احتمال) برای توصیف میزان محتمل‌بودن وقوع یک پیشامد استفاده می‌شود، نظریه‌ی امکان از دو مفهوم استفاده می‌کند؛ ۱-امکان و ۲-ضرورت یا الزام یک پیشامد. میزان ضرورت یا الزام برای هر مجموعه‌ی A ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$nec(A) = 1 - \text{امکان وقوع پیشامدهای متمم} = 1 - pos\left(\bigcup_i \overline{\mathrm{A}}_i\right)$$

نکته: $\min[nec(A), nec(\cup_i \overline{\mathrm{A}}_i)] = 0$ ؛ چون یکی از مقادیر $nec(A)$ یا $nec(\cup_i \overline{\mathrm{A}}_i)$ صفر می‌باشد.

نکته: اگر الزام وجود یک پیشامد بزرگ‌تر از صفر باشد، آن‌گاه امکان وقوع آن برابر با ۱ می‌باشد.

$nec(A) > 0 \Rightarrow pos(A) = 1$

نکته: اگر امکان وقوع یک پیشامد کوچک‌تر از ۱ باشد (امکانش قطعی نباشد)، آن‌گاه الزام وجود آن برابر با صفر می‌باشد.

$pos(A) < 1 \Rightarrow nec(A) = 0$

میزان فازی‌بودن مجموعه‌ی فازی (Fuzziness of Fuzzy Set)

فرض می‌کنیم مجموعه‌ی فازی $\tilde{\mathrm{A}}$ را داریم. میزان تعلق‌های مختلفی از مجموعه‌ی فازی $\tilde{\mathrm{A}}$ را در نظر می‌گیریم و داریم:

$if\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \Rightarrow$ تعلق ابهام ندارد

$if\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.8 \Rightarrow$ تعلق مقداری ابهام دارد

$if\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5 \Rightarrow$ تعلق بیشترین ابهام را دارد

$if\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.2 \Rightarrow$ تعلق مقداری ابهام دارد

$if\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \Rightarrow$ تعلق ابهام ندارد

نکته: زمانی‌که مجموعه کلاسیک است، میزان فازی‌بودن باید مقدار صفر داشته باشد.

نکته: $if\ \left(\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \geq 0.5\ \ ,\ \ \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \Rightarrow$ A فازی‌تر از B است

نکته: $if\ \left(\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \leq 0.5\ \ ,\ \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \Rightarrow$ A فازی‌تر از B است

مثال: اگر مجموعه‌های فازی $\tilde{A} = \{(1\ ,0.2), (2\ ,0), (3\ ,0.9), (4\ ,1)\}$ و $\tilde{B} = \{(1\ ,0.4), (2\ ,0.2), (3\ ,0.8), (4\ ,0.5)\}$ را داشته باشیم، می‌گوییم مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ از مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ فازی‌تر است؛ چون در مقایسه‌ی تک‌تکِ اعضاء دو مجموعه با هم، مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ از مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ فازی‌تر می‌باشد.

نکته: اگر بی‌نظمی یا آنتروپیِ (Entropy) مجموعه‌ای بیشتر از مجموعه‌ی دیگری باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی اول فازی‌تر از مجموعه‌ی دوم می‌باشد.

متغیرهای زبانی (Linguistic Variables)

متغیر عددی: یک نام یا شناسه است که مقدار عددی در آن قرار می‌گیرد.

مثال: مقدار عددی $\longrightarrow$ $x = 2$ $\longrightarrow$ متغیر عددی

متغیر زبـانی (کلامی): یک مقدار زبانی به آن تعلق می‌گیرد. متغیرهای فازی می‌توانند متغیرهای زبانی باشـــند. متغیرهای زبانی به مفاهیم زبانی، مانند: خیلی کوچک، متوسط، بزرگ و ... گفته می‌شود.

مثال: جمله‌ی «هوا سرد است.» را در نظر بگیرید. «هوا» متغیر زبانی و «سرد» مقدار زبانی است.

هوا سرد است.

متغیر زبانی — مقدار زبانی

مثال: جمله‌ی «هوا خیلی سرد است.» را در نظر بگیرید. «هوا» متغیر زبانی و «خیلی سرد» مقدار زبانی است.

هوا خیلی سرد است.

متغیر زبانی — مقدار زبانی

کلمه‌ی «خیلی» به عنوان تأکید استفاده شده است.

مثال: جمله‌ی «هوا سـرد یا خیلی سرد است.» را در نظر بگیرید. «هوا» متغیر زبانی و «سرد یا خیلی سرد» مقدار زبانی است که ترکیبی از مقادیر زبانی می‌باشد.

هوا سرد یا خیلی سرد است.

متغیر زبانی — مقدار زبانی

در تعیین تابع عضویت متغیرهای زبانی، یکی از متغیرها به عنوان متغیر پایه فرض شده و تابع عضویت برای آن متغیر تعیین می‌شود. سپس تابع عضویت سایر مقادیر زبانی با اضافه‌شدن hedge زبانی بدست می‌آید.

$$\text{زبانی } hedge = \begin{cases} \tilde{A} & \\ \tilde{A}^2 & \text{خیلی} \\ \tilde{A}^4 & \text{خیلی خیلی} \\ \tilde{A}^{\frac{1}{2}} & \text{کم و بیش ، نسبتاً} \\ \tilde{A}^{\frac{1}{3}} & \text{کمی} \\ 1-\tilde{A} & \text{برعکس } \tilde{A} \end{cases}$$

نکته: مقدار زبانی می‌تواند شامل حروف ربط (و، یا) نیز باشد.

مثال: یک تعریف دلخواه از هوای سرد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

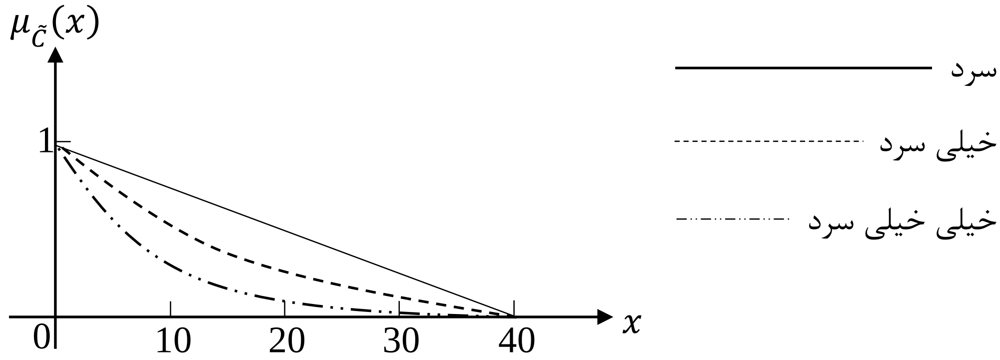
$$(\text{سرد})\ cold = \{(0°\text{C}\,,1), (10°\text{C}\,,0.8), (20°\text{C}\,,0.6), (30°\text{C}\,,0.2), (40°\text{C}\,,0)\}$$

حال تابع عضویت سایر مقادیر زبانی را حساب می‌کنیم.

(خیلی سرد) $very\ cold = \{(0℃\ , 1), (10℃\ , 0.64), (20℃\ , 0.36), (30℃\ , 0.04), (40℃\ , 0)\}$

(خیلی خیلی سرد) $very\ very\ cold$

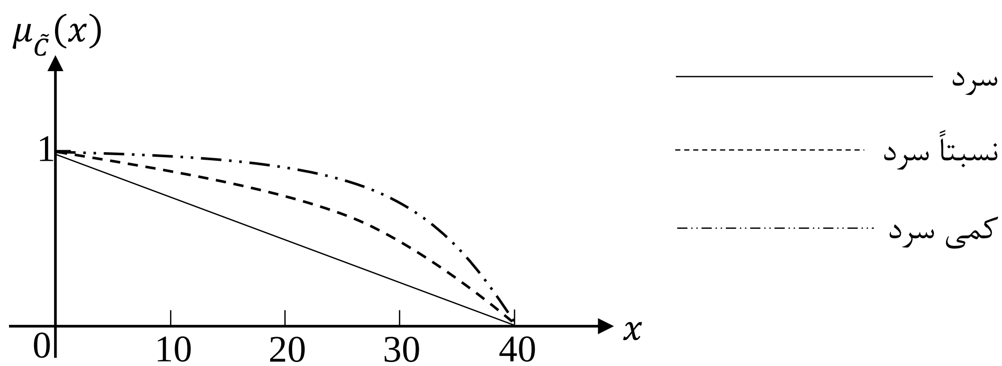
$$= \{(0℃\ , 1), (10℃\ , 0.4096), (20℃\ , 0.1296), (30℃\ , 0.0016), (40℃\ , 0)\}$$



(کم و بیش سرد ، نسبتاً سرد) relatively $cold$

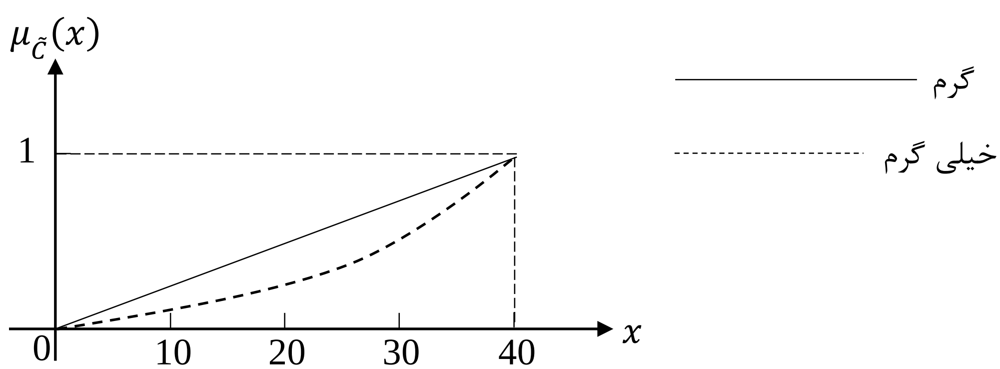
$$= \{(0℃\ , 1), (10℃\ , 0.89), (20℃\ , 0.77), (30℃\ , 0.45), (40℃\ , 0)\}$$

(کمی سرد) slightly $cold = \{(0℃\ , 1), (10℃\ , 0.93), (20℃\ , 0.84), (30℃\ , 0.58), (40℃\ , 0)\}$



(گرم) $hot = \{(0℃\ , 0), (10℃\ , 0.2), (20℃\ , 0.4), (30℃\ , 0.8), (40℃\ , 1)\}$

(خیلی گرم) $very$ hot $= \{(0℃\ , 0), (10℃\ , 0.04), (20℃\ , 0.16), (30℃\ , 0.64), (40℃\ , 1)\}$



مثال: تابع عضویت مقدار زبانی «هوا گرم یا کمی سرد است» را حساب کنید.

جواب: چون بین دو مقدار زبانی "گرم" و "کمی سـرد" از حرف ربط "یا" استفاده شده است، بنابراین باید بین آن‌ها اجتماع بگیریم.

$$\left(\text{گرم}\right)\ hot = \{(0℃\ ,0), (10℃\ ,0.2), (20℃\ ,0.4), (30℃\ ,0.8), (40℃\ ,1)\}$$

$$\left(\text{کمی سرد}\right)\ \text{slightly}\ cold = \{(0℃\ ,1), (10℃\ ,0.93), (20℃\ ,0.84), (30℃\ ,0.58), (40℃\ ,0)\}$$

$$\left(\text{گرم یا کمی سرد}\right)\ hot\ or\ slightly\ cold = \{(0℃\ ,1), (10℃\ ,0.93), (20℃\ ,0.84), (30℃\ ,0.8), (40℃\ ,1)\}$$

مثال: تابع عضویت مقدار زبانی «هوا گرم یا سرد است» را حساب کنید.

جواب: چون بین دو مقدار زبانی "گرم" و "سرد" از حرف ربط "یا" استفاده شده است، بنابراین باید بین آن‌ها اجتماع بگیریم.

$$\left(\text{گرم}\right)\ hot = \{(0℃\ ,0), (10℃\ ,0.2), (20℃\ ,0.4), (30℃\ ,0.8), (40℃\ ,1)\}$$

$$\left(\text{سرد}\right)\ cold = \{(0℃\ ,1), (10℃\ ,0.8), (20℃\ ,0.6), (30℃\ ,0.2), (40℃\ ,0)\}$$

$$\left(\text{گرم یا سرد}\right)\ hot\ or\ cold = \{(0℃\ ,1), (10℃\ ,0.8), (20℃\ ,0.6), (30℃\ ,0.8), (40℃\ ,1)\}$$

مثال: تابع عضویت مقدار زبانی «هوا گرم و خیلی گرم است» را حساب کنید.

جواب: چون بین دو مقدار زبانی "گرم" و "خیلی گرم" از حرف ربط "و" اسـتفاده شده است، بنابراین باید بین آن‌ها اشتراک بگیریم.

$$\left(\text{گرم}\right)\ hot = \{(0℃\ ,0), (10℃\ ,0.2), (20℃\ ,0.4), (30℃\ ,0.8), (40℃\ ,1)\}$$

$$\left(\text{خیلی گرم}\right)\ very\ \text{hot} = \{(0℃\ ,0), (10℃\ ,0.04), (20℃\ ,0.16), (30℃\ ,0.64), (40℃\ ,1)\}$$

$$\left(\text{گرم و خیلی گرم}\right)\ hot\ and\ very\ hot = \{(0℃\ ,0), (10℃\ ,0.04), (20℃\ ,0.16), (30℃\ ,0.64), (40℃\ ,1)\}$$

مثال: تابع عضویت مقدار زبانی «هوا گرم و سرد است» را حساب کنید.

جواب: چون بین دو مقدار زبانی "گرم" و "سرد" از حرف ربط "و" استفاده شده است، بنابراین باید بین آن‌ها اشتراک بگیریم.

$$\left(\text{گرم}\right)\ hot = \{(0℃\ ,0), (10℃\ ,0.2), (20℃\ ,0.4), (30℃\ ,0.8), (40℃\ ,1)\}$$

$$\left(\text{سرد}\right)\ cold = \{(0℃\ ,1), (10℃\ ,0.8), (20℃\ ,0.6), (30℃\ ,0.2), (40℃\ ,0)\}$$

$$\left(\text{گرم و سرد}\right)\ hot\ and\ cold = \{(0℃\ ,0), (10℃\ ,0.2), (20℃\ ,0.4), (30℃\ ,0.2), (40℃\ ,0)\}$$

مثال: اگر اعضای مجموعه‌ی فازی را میزان رطوبت هوا و تابع عضویت مقدار زبانی "خشک" را به صورت $dry = \{(60\,,1), (70\,,0.8), (80\,,0.6), (90\,,0.3), (95\,,0)\}$ (خشک) تعریف کنیم، تابع عضویت مقدار زبانی «هوا خیلی گرم و کمی خشک است» را حساب کنید.

جواب: چون بین دو مقدار زبانی "خیلی گرم" و "کمی خشک" از حرف ربط "و" استفاده شده است، بنابراین باید بین آن‌ها اشتراک بگیریم؛ اما دمای هوا و رطوبت هوا هم‌جنس نیستند، پس نمی‌توان بین آن‌ها اشتراک گرفت

(خیلی گرم) $very\ \text{hot} = \{(0℃\,,0), (10℃\,,0.04), (20℃\,,0.16), (30℃\,,0.64), (40℃\,,1)\}$

(کمی خشک) $\text{slightly}\ dry = \{(60\,,1), (70\,,0.93), (80\,,0.84), (90\,,0.67), (95\,,0)\}$

منطق ریاضی (Mathematical Logic)

گزاره: گزاره عبارتی است که ارزش آن درست یا نادرست است.

متغیر منطقی: یک متغیر که معرف یک گزاره است.

p : امروز جمعه است $\begin{cases}0\\1\end{cases}$

q : فردا تعطیل نیست $\begin{cases}0\\1\end{cases}$

p	$\bar{p} = 1 - p$
0	1
1	0

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \longrightarrow q$	$\sim p \vee q$	$\sim p \vee (p \wedge q)$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1

بنابراین داریم:

$$p \longrightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim p \vee (p \wedge q)$$

قوانین هم‌ارزی‌های منطقی

۱- قوانین جابجایی

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

۲- قوانین شرکت‌پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

۳- قوانین توزیع پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

۴- قوانین جذب

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

۵- قوانین دمورگان

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

۶- قوانین متمم

$$p \wedge \sim p \equiv 0$$
$$p \vee \sim p \equiv 1$$

منطق محمول (Predicate Logic)

در منطق قدیم، هر گزاره را به دو بخش موضوع و محمول تقسیم می‌کنند. این نام‌گذاری به جای نهاد و مسند در ادبیات به کار می‌رود.

مثال: علی مرد است.

موضوع محمول

مثال: امروز تعطیل است.

موضوع محمول

سور عمومی: در نمادگذاری برای منطق گزاره‌ای، نماد $\forall$ که به صورت "به ازای هر" خوانده می‌شود، سور عمومی نام دارد.

سور وجودی: در نمادگذاری برای منطق گزاره‌ای، نماد $\exists$ که به صورت "وجود دارد" خوانده می‌شود، سور وجودی نام دارد.

مثال: هر ملایری ایرانی است.

سور عمومی موضوع (یک مجموعه) محمول

مثال: بعضی ایرانی‌ها لر هستند.

سور وجودی موضوع (یک مجموعه) محمول

گزاره‌نما: گزاره‌نما در واقع ساختمانی شبیه یک گزاره دارد. یک گزاره‌نما جمله‌ای خبری است که شامل یک یا چند متغیر است و به ازاء قراردادن مقادیر مختلف به جای متغیر آن، گزاره‌نما تبدیل به یک گزاره می‌شود. مقدار درست‌بودن یا نادرست‌بودن گزاره‌نما بستگی به مقدار متغیرهای آن دارد. گزاره‌نما تقریباً معادل محمول در منطق کلاسیک و متغیر آن معادل موضوع می‌باشد. یک گزاره‌نما شامل یک متغیر چون x را به صورت $P(x)$ و یک گزاره‌نما با دو متغیر را به صورت $P(x,y)$ نشان می‌دهیم.

$$\underbrace{P}_{\text{محمول}}(\underbrace{x}_{\text{موضوع}})$$

مثال: عبارت «x مرد است» یک گزاره‌نما شامل متغیر عددی x است.

نکته: بیان تبدیل سور عمومی به صورت یک رابطه‌ی منطقی

$$I\left(\bigcap_{1}^{M} m_i\right) \Leftrightarrow I(m_1) \wedge I(m_2) \wedge I(m_3) \wedge \ldots \wedge I(m_M)$$

مثال: هر ملایری ایرانی است.

اگر حتی یک ملایری پیدا کنیم که ایرانی نباشد، این عبارت صحیح نیست.

نکته: بیان تبدیل سور وجودی به صورت یک رابطه‌ی منطقی

$$L\left(\bigcap_{1}^{R} r_i\right) \Leftrightarrow L(r_1) \vee L(r_2) \vee L(r_3) \vee \ldots \vee L(r_R)$$

مثال: بعضی ایرانی‌ها لر هستند.

اگر حتی یک ایرانی پیدا کنیم که لر باشد، این عبارت صحیح است.

نکته: در منطق فازی نمی‌توان گفت که یک عبارت درست یا نادرست است، بلکه میزان درست‌بودن یا نادرست‌بودن را می‌توان بیان کرد.

مثال: عبارت «دمای $\underbrace{\text{هوا}}_{x}$ $\underbrace{\text{سرد}}_{\text{منطق فازی}}$ است.» را در نظر بگیرید.

$$(\text{سرد})\ cold = \{(0°C\ ,1), (10°C\ ,0.8), (20°C\ ,0.6), (30°C\ ,0.2), (40°C\ ,0)\}$$
$$cold(x) = cold(20°C) = 0.6$$

میزان درست‌بودن این گزاره‌نما با توجه به $x = 20°C$ مقدار 0.6 است؛ یعنی این عبارت 0.6 درست و 0.4 نادرست است.

گزاره‌های فازی

انواع گزاره‌های فازی:
- ۱- گزاره‌های فازی ساده (اتمی)
- ۲- گزاره‌های فازی مرکب

گزاره‌های فازی مرکب از چند گزاره‌ی فازی ساده تشکیل شده است که با ربط‌های and ، or و not که به ترتیب نشانگر "اشتراک فازی" ، "اجتماع فازی" و "مکمل فازی" هستند، با هم ترکیب شده‌اند.

تعیین تابع عضویت برای گزاره‌های مرکب

۱- استفاده از اشتراک فازی برای and

$$p \wedge q:\ \mu_{p\wedge q}(x) = \min\left[\mu_p(x), \mu_q(x)\right]$$

۲- استفاده از اجتماع فازی برای or

$$p \vee q:\ \mu_{p\vee q}(x) = \max\left[\mu_p(x), \mu_q(x)\right]$$

۳- استفاده از مکمل فازی برای not

$$\sim p = 1 - p:\ \mu_{\tilde{p}}(x) = 1 - \mu_p(x)$$

۴- استفاده از اجتماع فازی برای استلزام (Implication)

$$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q:\ \mu_{p\to q}(x) = \mu_{\sim p\vee q}(x) = \max\left[1 - \mu_p(x), \mu_q(x)\right]$$

۵- استفاده از اجتماع و اشتراک فازی برای استلزام (Implication)

$$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee (p \wedge q):\ \mu_{p\to q}(x) = \mu_{\sim p\vee(p\wedge q)}(x) = \max\left[1 - \mu_p(x), \min[\mu_q(x), \mu_q(x)]\right]$$

استنتاج در منطق بولی (Inference)

استنتاج رو به جلو (Mondes Pounes)

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ q \end{array}$$

اگر مقدمه درست و روش رسیدن به نتیجه هم درست باشد، نتیجه هم درست است.

$$\begin{array}{l} p \\ p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow l \\ \underline{l \longrightarrow w} \\ w \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} p \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ q \\ \underline{q \longrightarrow l} \\ l \\ \underline{l \longrightarrow w} \\ w \end{array}$$

استنتاج رو به عقب (Mondes Tolles)

$$\begin{array}{l} \sim q \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ \sim p \end{array}$$

اگر تالی نادرست و روش رسیدن به نتیجه درست باشد، مقدمه هم نادرست است.

عمل ترکیب (Composition)

$$\begin{array}{lcl} p & \Longrightarrow & R(x) \\ \underline{p \longrightarrow q} & \Longrightarrow & \underline{R(x,y)} \quad \Longrightarrow \quad R(y) = R(x)oR(x,y) \\ q & \Longrightarrow & R(y) \end{array}$$

مثــال: اگر «دمای هـوا سـرد است» $= p$ و «اگر دمای هـوا سـرد باشـد، آلودگی هـوا زیاد اسـت» $= p \longrightarrow q$ ، آن‌گـاه «آلودگی هوا زیاد است» $= q$ را می‌توان با توجه به عمل ترکیب، از رابطه‌ی $R(y) = R(x)oR(x,y)$ بدست آورد.

مثال: اگر مجموعه‌ی جهانی $X = \{1\ ,2\ ,3\ ,4\}$ ، «x عددی کوچک است» $= p$ و «x و y تقریباً برابرند» $= p \longrightarrow q$ باشند، آن‌گاه $R(y)$ را حساب کنید.

$R(x) = \{(1\ ,1), (2\ ,0.6), (3\ ,0.2), (4\ ,0)\}$

$R(x,y)$	1	2	3	4
1	1	0.5	0	0
2	0.5	1	0.5	0
3	0	0.5	1	0.5
4	0	0	0.5	1

جواب: برای بدست‌آوردن $R(y)$ ، از رابطه‌ی $R(y) = R(x)oR(x,y)$ استفاده می‌کنیم و ماتریس $R(x)$ را با ماتریس $R(x,y)$ ترکیب می‌کنیم (از ترکیب توابع بر روی مجموعه‌های فازی استفاده می‌کنیم).

$$[a_{i1}\ \ a_{i2} \dots\ \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \max\left[\min[a_{i1}\ ,b_{1j}]\ ,\min[a_{i2}\ ,b_{2j}]\ ,\dots\ ,\min[a_{in}\ ,b_{nj}]\right]$$

$$[1 \quad 0.6 \quad 0.2 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0.6 \quad 0.5 \quad 0.2]$$

$R(y) = \{(1\ ,1), (2\ ,0.6), (3\ ,0.5), (4\ ,0.2)\}$

مثال: اگر مجموعه‌ی جهانی $X = \{1\ ,2\ ,3\ ,4\}$ ، «x برابر 2 است» $= p$ و «x و y تقریباً برابرند» $= p \longrightarrow q$ باشــند، آن‌گاه $R(y)$ را حساب کنید.

$R(x) = \{(1\ ,0), (2\ ,1), (3\ ,0), (4\ ,0)\}$

$R(x,y)$	1	2	3	4
1	1	0.5	0	0
2	0.5	1	0.5	0
3	0	0.5	1	0.5
4	0	0	0.5	1

جواب: برای بدست‌آوردن $R(y)$ ، از رابطه‌ی $R(y) = R(x)oR(x,y)$ استفاده می‌کنیم و ماتریس $R(x)$ را با ماتریس $R(x,y)$ ترکیب می‌کنیم.

$$[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = [0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0]$$

$R(y) = \{(1\,,0.5),(2\,,1),(3\,,0.5),(4\,,0)\}$

مثال: اگر مجموعه‌ی جهانی $X = \{1\,,2\,,3\,,4\}$ ، «دمای هوا سرد است» $= p$ و «آلودگی هوا زیاد است» $= q$ باشند، آن‌گاه «اگر دمای هوا سرد است، آلودگی هوا زیاد است» $= p \longrightarrow q$ را حساب کنید.

$R(x) = \{(0°\mathrm{C}\,,1),(10°\mathrm{C}\,,0.5),(20°\mathrm{C}\,,0.2),(30\,,0)\}$

$R(y) = \{(50\,,0),(100\,,0.2),(150\,,0.6),(200\,,1)\}$

جواب: برای بدست‌آوردن $R(x,y)$ ، از رابطه‌ی $p \longrightarrow q$ استفاده می‌کنیم.

$$p \longrightarrow q \equiv {\sim}p \vee q \Longrightarrow \mu_{\sim p \vee q}(x) = \max\left[1 - \mu_p(x), \mu_q(x)\right]$$

$R(\bar{x}) = \{(0°\mathrm{C}\,,0),(10°\mathrm{C}\,,0.5),(20°\mathrm{C}\,,0.8),(30\,,1)\}$

$R(x,y)$	50	100	150	200
0	0	0.2	0.6	1
10	0.5	0.5	0.6	1
20	0.8	0.8	0.8	1
30	1	1	1	1

مثال: در مثال قبل با توجه به «دمای هوا گرم است» $= {\sim}p$ ، میزان آلودگی هوا را بدست آورید.

جواب: برای بدست‌آوردن $R(y)$ ، از رابطه‌ی $R(y) = R(\bar{x})oR(x,y)$ استفاده می‌کنیم و ماتریس $R(\bar{x})$ را با ماتریس $R(x,y)$ ترکیب می‌کنیم.

$R(\bar{x}) = \{(0°\mathrm{C}\,,0),(10°\mathrm{C}\,,0.5),(20°\mathrm{C}\,,0.8),(30\,,1)\}$

$R(x,y)$	50	100	150	200
0	0	0.2	0.6	1
10	0.5	0.5	0.6	1
20	0.8	0.8	0.8	1
30	1	1	1	1

$$[0 \quad 0.5 \quad 0.8 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$R(y) = \{(50\,,1),(100\,,1),(150\,,1),(200\,,1)\}$

مثال: اگر مجموعه‌ی جهانی $X = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ ، «دمای هوا سرد است» $= p$ و «آلودگی هوا زیاد است» $= q$ باشـــند، آن‌گاه «اگر دمای هوا خیلی سرد باشد، آلودگی هوا زیاد است» $= p \longrightarrow q$ را حساب کنید.

$R(x) = \{(0℃ , 1), (10℃ , 0.5), (20℃ , 0.2), (30 , 0)\}$

$R'(x) = \{(0℃ , 1), (10℃ , 0.25), (20℃ , 0.04), (30 , 0)\}$

$R(x, y)$	50	100	150	200
0	0	0.2	0.6	1
10	0.5	0.5	0.6	1
20	0.8	0.8	0.8	1
30	1	1	1	1

جواب: برای بـدســـت‌آوردن $R(y)$ ، از رابطـه‌ی $R(y) = R'(x)oR(x, y)$ اســـتفاده می‌کنیم و ماتریس $R'(x)$ را با ماتریس $R(x, y)$ ترکیب می‌کنیم.

$$[1 \quad 0.25 \quad 0.04 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0.25 \quad 0.25 \quad 0.6 \quad 1]$$

$R(y) = \{(50 , 0.25), (100 , 0.25), (150 , 0.6), (200 , 1)\}$

مثال: اگر مجموعه‌ی جهانی $X = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ ، «دمای هوا سرد است» $= p$ و «آلودگی هوا زیاد است» $= q$ باشـــند، آن‌گاه «اگر دمای هوا گرم باشد، آلودگی هوا زیاد است» $= p \longrightarrow q$ را حساب کنید.

$R(x) = \{(0℃ , 1), (10℃ , 0.5), (20℃ , 0.2), (30 , 0)\}$

$R''(x) = \{(0℃ , 0), (10℃ , 0.5), (20℃ , 0.8), (30 , 1)\}$

$R(x, y)$	50	100	150	200
0	0	0.2	0.6	1
10	0.5	0.5	0.6	1
20	0.8	0.8	0.8	1
30	1	1	1	1

جواب: برای بدســـت‌آوردن $R(y)$ ، از رابطه‌ی $R(y) = R''(x)oR(x, y)$ اســـتفاده می‌کنیم و ماتریس $R''(x)$ را با ماتریس $R(x, y)$ ترکیب می‌کنیم.

$$[0 \quad 0.5 \quad 0.8 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$R(y) = \{(50 , 1), (100 , 1), (150 , 1), (200 , 1)\}$

نکته: استنتاج مثال قبلی از لحاظ منطق فازی صحیح است، اما از لحاظ منطق انسانی و مفیدبودن، قابل استفاده نیست.

نکته: در منطق بولی، با توجه به استنتاج 1 نمی‌توان در مورد استنتاج 2 نظری داد.

$$\begin{array}{l} \text{①} \\ p \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ q \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{②} \\ \sim p \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ \mathfrak{X} \end{array}$$

نکته: در منطق فازی، با توجه به استنتاج ① می‌توان استنتاج ② را نتیجه گرفت؛ زیرا در منطق فازی می‌توان درباره‌ی مجموعه‌ای از مقادیر صحبت کرد.

$$\begin{array}{l} \text{①} \\ p \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ q \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{②} \\ \sim p \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ \sim q \end{array}$$

نکته: اگر تعریف ما از ترکیب، فرمول ① و تعریف ما از هم‌ارزی استلزام، فرمول ② و تعریف ما از اجتماع (یا)، فرمول ③ و تعریف ما از مکمل (نقیض)، فرمول ④ باشد، آن‌گاه تعریف ما از استنتاج فازی درست است.

① $\max\left[\min[a_{i1}, b_{1j}], \min[a_{i2}, b_{2j}], \ldots, \min[a_{in}, b_{nj}]\right]$

② $p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$

③ $\mu_{p \vee q}(x) = \max\left[\mu_p(x), \mu_q(x)\right]$

④ $\mu_{\tilde{p}}(x) = 1 - \mu_p(x)$

تعریف yager از نقیض:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \left(1 - \mu_p(x)^w\right)^{\frac{1}{w}} \quad \text{یا} \quad \mu_{p \vee q}(x) = \max\left[1, \mu_p(x) + \mu_q(x)\right]$$

نکته: یکی از چالش‌های استنتاج فازی

$$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim p \vee (p \wedge q)$$

$$\max\left[1 - \mu_p(x), \mu_q(x)\right] \neq \max\left[1 - \mu_p(x), \min[\mu_q(x), \mu_q(x)]\right]$$

استلزام سراسری و محلی

وقتی دانش بشری در قالب قواعد اگر-آن‌گاه بازنمایی می‌شود -از آن‌جا که افراد مختلف تفسیرهای متفاوتی از این‌گونه قواعد دارند- لازم است برای تطابق با این تفسیرها، استلزام‌های گوناگونی وجود داشته باشد.

برای یک قاعده‌ی کلاسیک $p \longrightarrow q$ ، یک استلزام سراسری وجود دارد (همه‌ی حالت‌های ممکن مطابق جدول درستی مشخص است)، ولی در مورد یک قاعده‌ی فازی لزوماً این‌چنین نیست و می‌تواند استلزام محلی وجود داشته باشد. در استلزام محلی با توجه به جدول درستی زیر، هم‌ارزی $p \longrightarrow q \equiv p \wedge q$ را داریم.

p	q	$p \longrightarrow q$	$p \wedge q$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

استلزام محلی

شخصی به نام مَمدانی بعد از آقای پروفسور زاده بر روی منطق فازی کار کرد و مسأله‌ی استلزام محلی در منطق فازی مطرح شد. ممدانی می‌گوید: «زمانی که در فضای منطق فازی هستیم و ارزش p درست است، می‌توان هم‌ارزی $p \longrightarrow q \equiv p \wedge q$ را به کار بُرد و اگر از فضای منطق فازی خارج شویم، دیگر این هم‌ارزی معتبر نیست.»

تعاریف مختلف استلزام ($p \to q$)

استلزام دائینز-رِشِر (Dienes-Rescher):

$$\mu_{p\vee q}(x) = \max\left[\mu_p(x), \mu_q(x)\right] \Longrightarrow \mu_{p\to q}(x) = \mu_{\sim p\vee q}(x) = \max\left[1-\mu_p(x), \mu_q(x)\right]$$ (با فرض)

استلزام زاده (Zadeh):

$$\mu_{p\vee q}(x) = \max\left[\mu_p(x), \mu_q(x)\right] \Longrightarrow \mu_{p\to q}(x) = \mu_{\sim p\vee (p\wedge q)}(x) = \max\left[1-\mu_p(x), \min[\mu_q(x), \mu_q(x)]\right]$$ (با فرض)

استلزام لوکاسِویچ (Lukasiewicz):

$$\mu_{p\vee q}(x) = \min\left[1, \mu_p(x) + \mu_q(x)\right] \Longrightarrow \mu_{p\to q}(x) = \mu_{\sim p\vee q}(x) = \min\left[1, 1-\mu_p(x) + \mu_q(x)\right]$$ (با فرض)

استلزام گودل (Godel):

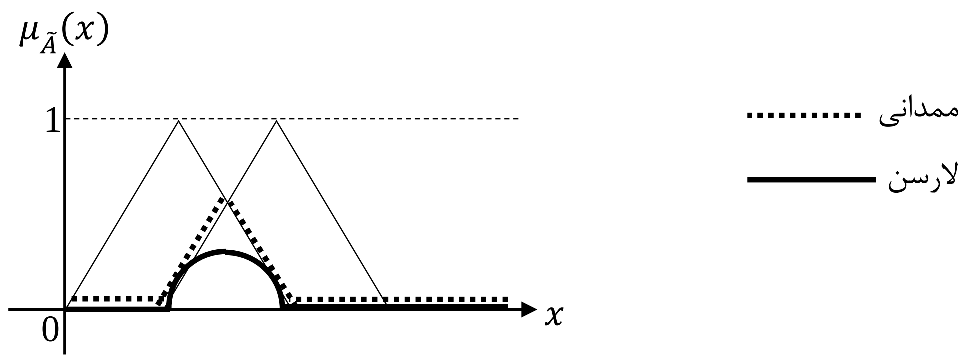
$$\mu_{p\to q}(x) = \begin{cases} 1 & \mu_p(x) \le \mu_q(x) \\ \mu_q(x) & \mu_p(x) > \mu_q(x) \end{cases}$$

استلزام مَمدانی یا مینیمم مَمدانی (Mamdani): پُرکاربردترین استلزام در منطق فازی است. ویژگی این استلزام، محلی‌بودن قاعده‌ی اگر-آن‌گاه فازی است.

$$p \longrightarrow q \equiv \mu_p(x) \wedge \mu_q(x) = \min\left[\mu_p(x), \mu_q(x)\right]$$

استلزام لارسِن یا ضرب مَمدانی (Larsen):

$$p \longrightarrow q \equiv \mu_p(x) \wedge \mu_q(x) = \mu_p(x) . \mu_q(x)$$



مثال: اگر مجموعه‌های جهانی X و Y مطابق زیر و «x کوچک است» $= p$ و «y بزرگ است» $= q$ باشند، آن‌گاه «اگر x کوچک باشد، آن‌گاه y بزرگ است» $= p \longrightarrow q$ را بر اساس استلزام‌های گودل، ممدانی و لارسن حساب کنید.

$X = \{1 , 2 , 3 , 4\}$

$Y = \{1\,,2\,,3\}$

$$R(x) = \{\frac{1}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0}{4}\}$$

$$R(y) = \{\frac{0}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{1}{3}\}$$

جواب:

الف) بر اساس استلزام گودل:

$$\mu_{p\to q}(x) = \begin{cases} 1 & \mu_p(x) \le \mu_q(x) \\ \mu_q(x) & \mu_p(x) > \mu_q(x) \end{cases}$$

$p \longrightarrow q \equiv R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.5	1
3	0	1	1
4	1	1	1

ب) بر اساس استلزام ممدانی:

$$p \longrightarrow q \equiv \mu_p(x) \wedge \mu_q(x) = \min\left[\mu_p(x), \mu_q(x)\right]$$

$p \longrightarrow q \equiv R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.5	0.7
3	0	0.2	0.2
4	0	0	0

نکته: همان‌طور که در مقادیر جدول بالا می‌بینیم، در حوزه‌ای که مقدار x کوچک است، مقادیر اعتبار بیشتری دارند و به روش گودل نزدیک‌ترند. هرچه از حوزه‌ی استلزام محلی؛ یعنی کوچک‌بودن x که فاصله می‌گیریم، مقادیر اعتبار کمتری پیدا می‌کنند.

ج) بر اساس استلزام لارسن:

$$p \longrightarrow q \equiv \mu_p(x) \wedge \mu_q(x) = \mu_p(x).\,\mu_q(x)$$

$p \longrightarrow q \equiv R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.35	0.7
3	0	0.1	0.2
4	0	0	0

نکته: همان‌طور که در مقادیر جدول بالا می‌بینیم، در حوزه‌ای که مقدار x کوچک است، مقادیر اعتبار بیشتری دارند و به روش گودل نزدیک‌ترند. هرچه از حوزه‌ی استلزام محلی؛ یعنی کوچک‌بودن x که فاصله می‌گیریم، مقادیر اعتبار کمتری پیدا می‌کنند. روش لارسن نسبت به روش ممدانی، استلزام محلی‌تری دارد.

مثـــــال: اگـــــــر مجـــــــــموعه‌های جـــــــــهانی X و Y مطـــــــــابق زیـــــر، و «x برابر 1 است» $= p$ و «اگر x کوچک باشد، آن‌گاه y بزرگ است» $= p \longrightarrow q$ باشند، آن‌گاه «y چند است؟» $= q$ را بر اساس استلزام‌های گودل و ممدانی حساب کنید.

$X = \{1\,,2\,,3\,,4\}$

$Y = \{1\,,2\,,3\}$

$R(x) = \{(1\,,1), (2\,,0), (3\,,0), (4\,,0)\}$

جواب: برای بدست‌آوردن $R(y)$ ، از رابطه‌ی $R(y) = R(x)oR(x,y)$ استفاده می‌کنیم و ماتریس $R(x)$ را با ماتریس $R(x,y)$ ترکیب می‌کنیم.

الف) بر اساس استلزام گودل:

$R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.5	1
3	0	1	1
4	1	1	1

$$[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0.5 \quad 1]$$

$R(y) = \{(1\,,0), (2\,,0.5), (3\,,1)\}$

ب) بر اساس استلزام ممدانی:

$R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.5	0.7
3	0	0.2	0.2
4	0	0	0

$$[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0.5 \quad 1]$$

$R(y) = \{(1\,,0), (2\,,0.5), (3\,,1)\}$

مثـــــال: اگـــــــر مجـــــــــموعه‌های جـــــــــهانی X و Y مطـــــــــابق زیـــــر، و «x برابر 2 است» $= p$ و «اگر x کوچک باشد، آن‌گاه y بزرگ است» $= p \longrightarrow q$ باشند، آن‌گاه «y چند است؟» $= q$ را بر اساس استلزام‌های گودل و ممدانی حساب کنید.

$X = \{1\,,2\,,3\,,4\}$

$Y = \{1, 2, 3\}$

$R(x) = \{(1, 0), (2, 1), (3, 0), (4, 0)\}$

جواب: برای بدست‌آوردن $R(y)$ ، از رابطه‌ی $R(y) = R(x) o R(x, y)$ استفاده می‌کنیم و ماتریس $R(x)$ را با ماتریس $R(x, y)$ ترکیب می‌کنیم.

الف) بر اساس استلزام گودل:

$R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.5	1
3	0	1	1
4	1	1	1

$$[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0.5 \quad 1]$$

$R(y) = \{(1, 0), (2, 0.5), (3, 1)\}$

ب) بر اساس استلزام ممدانی:

$R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.5	0.7
3	0	0.2	0.2
4	0	0	0

$$[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0.5 \quad 0.7]$$

$R(y) = \{(1, 0), (2, 0.5), (3, 0.7)\}$

مثال: اگر مجموعه‌های جهانی X و Y مطابق زیر، و «x برابر 4 است» $= p$ و «اگر x کوچک باشد، آن‌گاه y بزرگ است» $= p \longrightarrow q$ باشند، آن‌گاه «y چند است؟» $= q$ را بر اساس استلزام‌های گودل و ممدانی حساب کنید.

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{1, 2, 3\}$

$R(x) = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 1)\}$

جواب: برای بدست‌آوردن $R(y)$ ، از رابطه‌ی $R(y) = R(x)oR(x,y)$ استفاده می‌کنیم و ماتریس $R(x)$ را با ماتریس $R(x,y)$ ترکیب می‌کنیم.

الف) بر اساس استلزام گودل:

$R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.5	1
3	0	1	1
4	1	1	1

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$R(y) = \{(1,1),(2,1),(3,1)\}$$

ب) بر اساس استلزام ممدانی:

$R(x,y)$	1	2	3
1	0	0.5	1
2	0	0.5	0.7
3	0	0.2	0.2
4	0	0	0

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$R(y) = \{(1,0),(2,0),(3,0)\}$$

نکته: x و y همیشه گسسته نیستند، می‌توانند پیوسته هم باشند (به روابط زیر دقت کنید). در این نوع از مسائل، با توجه به تعاریف مختلف استلزام عمل می‌کنیم. مثلاً در روش لارسن، رابطه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x-25}{4}}}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(y) = \frac{1}{1 + e^{\frac{y-25}{4}}}$$

نکته: رابطه‌ها می‌توانند چند آیتمی نیز باشند. مانند روابط زیر:

$$(p \wedge q) \longrightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r$$

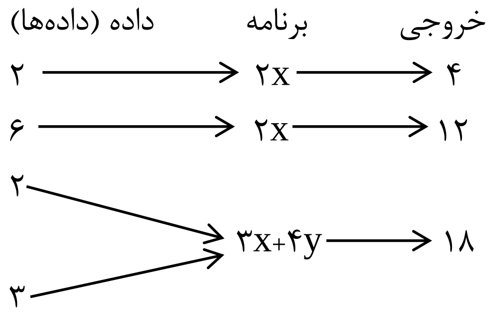
$$(p \vee q) \longrightarrow r \equiv \sim(p \vee q) \vee r$$

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \longrightarrow q \equiv \sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \vee q$$

در این نوع از مسائل، ابتدا مقدمه‌ی استلزام یا شرط را طبق تعاریف مختلفی که داشتیم، بدست می‌آوریم و سپس استلزام را حل می‌کنیم. مثلاً برای $(p \wedge q) \longrightarrow r$ ، ابتدا $(p \wedge q)$ را با استفاده از تعریف اشتراک $(\min(p,q))$ حل می‌کنیم و سپس طبق خواسته‌ی مسأله، با استفاده از قوانین استلزام جواب نهایی را بدست می‌آوریم.

دو مقوله به نام‌های برنامه‌نویسی ماشین و یادگیری ماشین وجود دارد.
در برنامه‌نویسی ماشین، هم داده یا داده‌ها (ورودی یا ورودی‌ها) و هم برنامه را داریم که خروجی را برای ما تولید می‌کند.

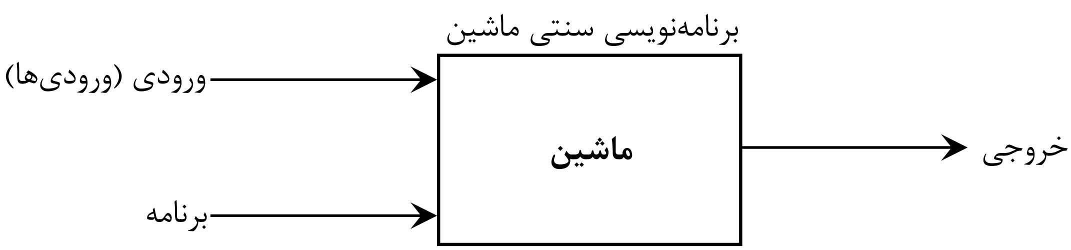
مثال: در روند زیر، داده (داده‌ها) به برنامه داده شده و خروجی از برنامه گرفته می‌شود.



مثال: اگر قیمت هر مترمربع آپارتمان یک میلیون تومان باشد، جدول زیر را پر کنید.
جواب: بر اساس این‌که قیمت هر مترمربع آپارتمان یک میلیون تومان است، کافی است که مساحت آپارتمان در یک میلیون تومان ضرب شود تا قیمت کل آپارتمان بدست آید؛ یعنی در این‌جا یک رابطه یا برنامه بین ورودی و خروجی پیدا می‌شود که بر اساس این رابطه یا برنامه با دادن ورودی، خروجی مربوطه مشخص می‌شود.

مساحت (مترمربع)	قیمت (میلیون تومان)
۱۰۰	۱۰۰
۲۰۰	۲۰۰

این یک مثال از برنامه‌نویسی عرفی و مرسوم ماشین است؛ یعنی به شکل زیر:

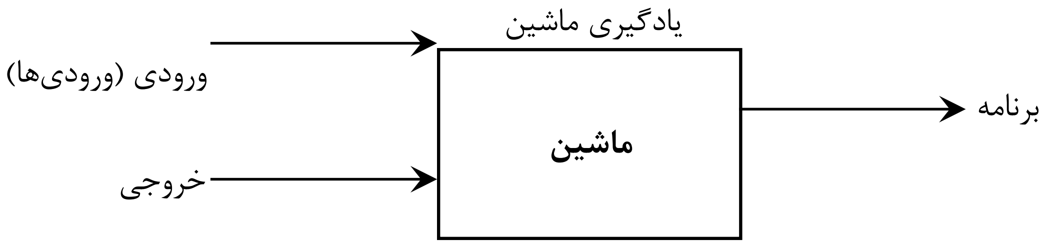


مثال: اگر قیمت آپارتمان ۵۰ مترمربعی ۱۲۵ میلیون تومان و قیمت آپارتمان ۱۰۰ مترمربعی ۲۵۰ میلیون تومان باشد، قیمت آپارتمان ۷۰ متری چقدر است؟ (مثالی از یادگیری ماشین)

مساحت (مترمربع)	قیمت (میلیون تومان)
۵۰	۱۲۵
۱۰۰	۲۵۰
۷۰	؟

جواب: بر اســـاس این‌کـه قیمـت آپارتمان ۵۰ مترمربعی ۱۲۵ میلیون تومان و قیمت آپارتمان ۱۰۰ مترمربعی ۲۵۰ میلیون تومان اسـت، می‌توان یک رابطه یا برنامه برای این ورودی و خروجی‌ها کشـف نمود؛ یعنی ماشـین یاد می‌گیرد که با تقسـیم خروجی‌ها بر ورودی‌ها قیمت یک مترمربع آپارتمان، ۲,۵۰۰,۰۰۰ تومان خواهد شـد و برای محاسـبه‌ی قیمت آپارتمان ۷۰ مترمربعی، می‌بایسـت ۷۰ مترمربع را در ۲,۵۰۰,۰۰۰ تومـان ضـرب کند تا قیمت ۱۷۵ میلیون تومانی برای آپارتمان ۷۰ مترمربعی بدست آید.

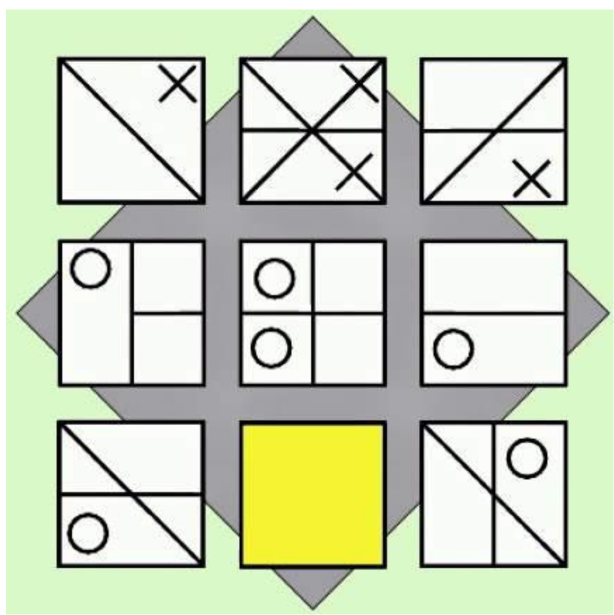
این یک مثال از یادگیری ماشین است؛ یعنی به شکل زیر:

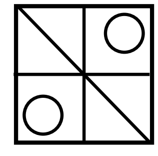


در یادگیری ماشـین، ماشـین بر اسـاس ورودی (ورودی‌ها) و خروجی رابطه را کشف می‌کند. رابطه‌ی کشف‌شده را به سیستم می‌دهد و با ورودی (ورودی‌های) جدید، خروجی جدید را پیدا می‌کند.

ورودی‌ها در واقع، همان بردار ویژگی‌ها هستند و استخراج ویژگی‌ها (features extraction) بر اساس آن‌ها صورت می‌گیرد.

مثالی از تست هوش: مربع وسطی از سطر سوم به چه شکلی است؟



جواب: 

مثال: در جدول زیر، تعداد ۵ ردیف داده به ماشین داده می‌شود. ماشین می‌خواهد داده‌های ردیف ۶ را تکمیل کند.

مکان شهری	مساحت (مترمربع)	نوع ساخت	نوع ساختمان	قیمت (میلیون تومان)
۱	۱۰۰	A	ویلایی	۲۵۰
۲	۸۰	B	آپارتمان	۷۰
۲	۹۰	A	ویلایی	۱۰۰
۱	۱۲۰	A	آپارتمان	۲۰۰
۲	۷۰	B	ویلایی	۱۲۰
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
۱	۱۲۰	B	ویلایی	؟

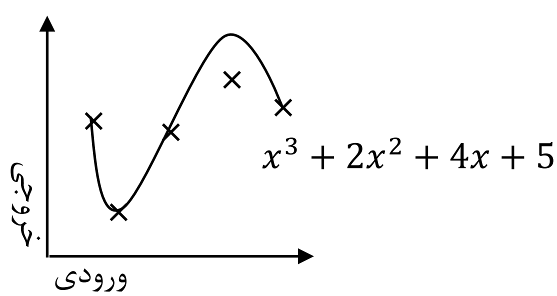
جواب: اگر تعداد داده‌هایی که به ماشین داده می‌شود افزایش یابد، در ردیف آخر -که هدف پیداکردن قیمت یک ساختمان ویلایی به مساحت ۱۲۰ مترمربع است- دقت افزایش می‌یابد.

پس اگر تعداد داده‌ها از ۵ به ۵۰ برسد، جواب ماشین دقیق‌تر می‌شود. اگر تعداد داده‌ها از ۵۰ به ۵۰۰ برسد، دقت بیشتر می‌شود. اگر تعداد داده‌ها از ۵۰۰ به ۵۰۰۰ برسد، دقت باز هم بیشتر می‌شود و ... .

دلایل استفاده از یادگیری ماشین

۱- زیادبودن تعداد ورودی‌ها: مثلاً اگر تعداد ۵۰۰ ورودی (ویژگی) داشته باشیم و بخواهیم رابطه‌ی بین آن‌ها را پیدا کنیم، کار مشکلی است و بنابراین از یادگیری ماشین استفاده می‌کنیم.

۲- فهم مشکل رابطه‌ی بین ورودی و خروجی: مثلاً در رگرسیون، یک‌سری ورودی و خروجی داریم و می‌خواهیم رابطه‌ی بین آن‌ها (فرمول) را پیدا کنیم. رگرسیون در واقع، همان یادگیری ماشین و ساده‌ترین شکل یادگیری ماشین است.



۳- افزایش رکوردها یا افزایش ورودی‌ها یا ورودی‌های جدید: هر چه تعداد رکوردها بیشتر می‌شود، دقت کار هم بیشتر می‌شود. در حین این‌که ویژگی‌ها را درست استخراج می‌کنیم، باید تعداد نمونه (رکورد) هم به اندازه داشته باشیم.

در m معادله و n مجهول داریم:

m معادله و n مجهول:
- اگر m=n باشد، یک جواب دارد
- اگر m>n باشد، جواب ندارد یا یک جواب دارد
- اگر m<n باشد، بی‌نهایت جواب دارد

اگر تابع y به صورت زیر باشد:

$$y = \begin{cases} 2x & x < 10 \\ 10x & x \geq 10 \end{cases}$$

و تعداد ۱۰ داده‌ی ورودی به صـورت ۰/۳، ۰/۱، ۰/۲، ۰/۸، ۵، ۸، ۱۲، ۹، ۴ و ۵/۵ داشـته باشیم، خروجی‌ها به ترتیب ۰/۶، ۰/۲، ۰/۴، ۱/۶، ۱۰، ۱۶، ۱۲۰، ۱۸، ۸ و ۱۱ خواهد شد.

طبق داده‌های ورودی، دقت این کار ٪۹۰ است؛ چون از بین ۱۰ داده‌ی ورودی، ۹ داده‌ی آن از رابطه‌ی y=2x حساب می‌شـود. عیب این است که تمام ۹ داده‌ی ورودی که رابطه‌ی آن‌ها به صورت y=2x است، تمایل (bias) به یک سمت دارند (xهای این ۹ داده کمتر از ۱۰ هستند).

اگر حجم زیادی از داده‌ها به یک سمت بایاس باشد، آن حجم کم را هم بر اساس سمتی که حجم زیاد است حساب می‌کند.

۴- پویایی یادگیری:

نکته: چیزی که خود انسـان هم نتواند آن را تشـخیص دهد، نمی‌توان از ماشـین انتظار داشت که راه‌حل خوبی برای آن بیان کند.

تعریف یادگیری ماشین

یادگیری ماشـین عبارت اسـت از این‌که چگونه می‌توان برنامه‌ای نوشـت که از طریق تجربه، یادگیری کرده و عملکرد خود را بهتر کند. یادگیری ممکن است باعث تغییر در ساختار برنامه و یا داده‌ها شود.

برخی از کاربردهای یادگیری ماشین:

- کنترل ربات‌ها
- داده کاوی
- تشخیص چهره، گفتار (صوت)، دست‌خط، اثر انگشت و ...
- پردازش داده‌های اینترنتی (ماشین‌های جستجوی وب)
- پیش‌بینی‌های بورس، ارز، هواشناسی، زلزله و ...
- بیوانفورماتیک: چگونه می‌توان ترتیب و شکل ژن‌ها را با استفاده از الگوریتم‌ها پیدا کرد (بیان ژن).

GCTA GGGTTACCA
CGAT CCCAATGGT

انواع یادگیری

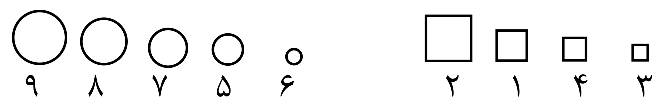
یادگیری ماشین در مسائل مختلفی کاربرد دارد:

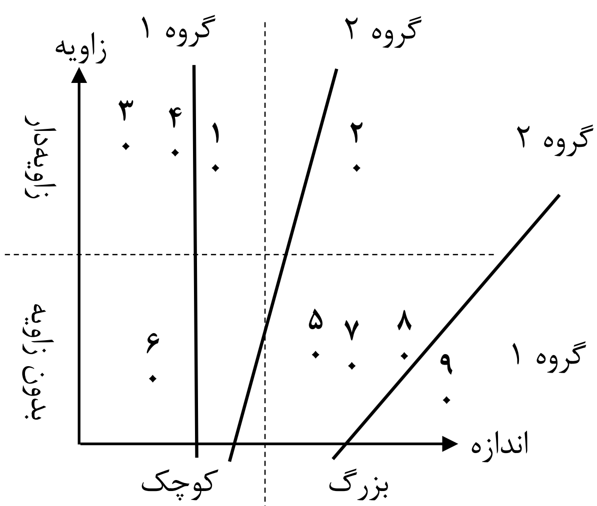
۱) یادگیری طبقه‌بندی یا کلاس‌بندی (Classification)، معادل با یادگیری با نظارت (Supervised Learning): در یادگیری طبقه‌بندی یا کلاس‌بندی، ماشین یاد می‌گیرد که ورودی‌ها را به دسته‌های از پیش تعیین‌شده‌ای نسبت دهد.

یادگیری با نظارت نوعی از یادگیری ماشین است که در آن، ورودی و خروجی مشخص است و به اصطلاح، ناظری وجود دارد که اطلاعاتی را در اختیار یادگیرنده قرار می‌دهد، و به این ترتیب سیستم سعی می‌کند تا تابعی را از ورودی به خروجی فراگیرد.

ورودی‌های یادگیری با نظارت
- ۱- تعداد دسته‌ها و مشخصات
- ۲- ویژگی‌ها

مثال: یک‌سری دایره و مربع داریم و می‌خواهیم آن‌ها را از هم جدا کنیم. دو ویژگی اندازه و زاویه (گوشه) را در نظر می‌گیریم.





دقت این کار، $\frac{7}{9} \cong \%78$ است.

طبقه‌بندی‌کننده بررسی می‌کند که بر اساس ویژگی‌ها، خطوط را در شکل چگونه ترسیم کند. این یک یادگیری با نظارت است. درخت تصمیم نیز، یک یادگیری با نظارت است.

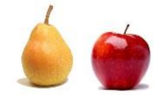
۲) یادگیری خوشه‌بندی (Clustering)، معادل با یادگیری بدون نظارت (Unsupervised Learning): در خوشه‌بندی، سیستم یادگیر کشف می‌کند که کدام ورودی‌ها با هم در یک دسته‌بندی قرار می‌گیرند.

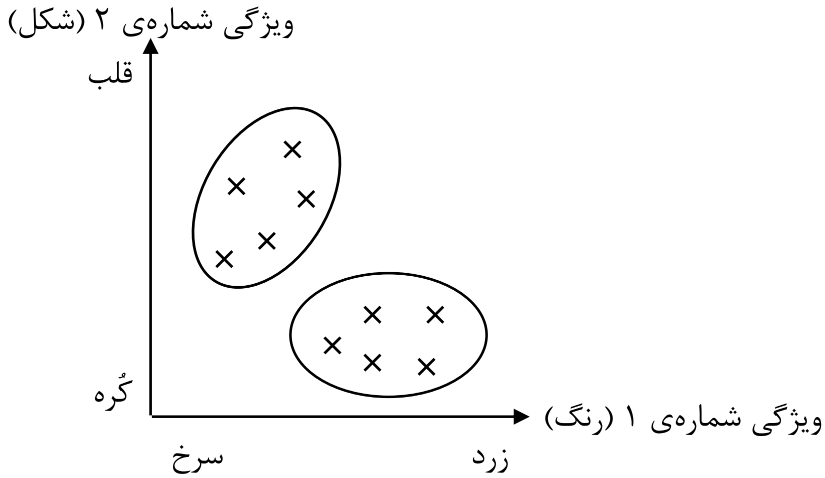
در یادگیری بدون نظارت برخلاف یادگیری با نظارت، داده‌های مشخصی از قبل وجود ندارد و هدف ارتباط ورودی و خروجی نیست، بلکه تنها دسته‌بندی آن‌ها مهم است و این یادگیرنده است که بایستی در داده‌ها به دنبال ساختاری خاص بگردد و نیازی به آموزش ندارد.

ورودی‌های یادگیری بدون نظارت ← ویژگی‌ها

الگوریتم شبکه‌های عصبی هم در یادگیری با نظارت و هم در یادگیری بدون نظارت عمل می‌کند.

مثال: دو نوع میوه‌ی سیب و گلابی داریم و می‌خواهیم آن‌ها را از هم جدا کنیم. ویژگی شماره‌ی ۱ را رنگ، و ویژگی شماره‌ی ۲ را شکل در نظر می‌گیریم. در اینجا Mapشدن (نگاشت) بر اساس ویژگی‌ها صورت می‌گیرد.





۳) پیش‌بینی عددی (Numeric Prediction): ماشـــین یاد می‌گیرد که به جای دســـته‌بندی ورودی‌ها، مقدار عددی خروجی را پیش‌بینی نماید یا تخمین بزند (خروجی ماشین، پیش‌بینی عددی بر اساس ورودی‌هاست).

پیش‌بینی عددی، گاهی اوقات یادگیری با نظارت و گاهی اوقات یادگیری بدون نظارت می‌باشد.

۴) یادگیری نیمه‌نظارتی (Semi-Supervised Learning): یادگیری نیمه‌نظارتی نیز نوعی از یادگیری است که هم از داده‌های طبقه‌بندی‌شـده (برچسـب‌خورده) و هم از داده‌های غیرطبقه‌بندی‌شـده (برچسب‌نخورده) به صورت هم‌زمان استفاده می‌کند تا دقت یادگیری مقداری بهبود یابد (در این نوع از یادگیری، مثال‌ها طوری هستند که برای تعداد کمی از آن‌ها مقدار خروجی موجود است، اما برای مثال‌های زیادی مقدار خروجی مشخص نیست).

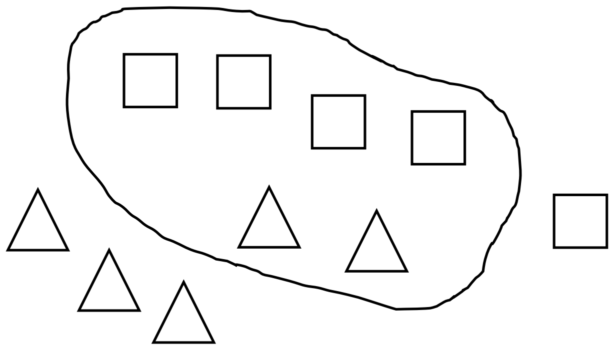
۵) یادگیری تقویتی (Reinforcement Learning): با اســتفاده از تشــویق، یادگیری انجام می‌شــود. در این نوع از یادگیری، مثال‌ها به صورت ورودی-خروجی نیستند، بلکه به صورت وضعیت-پاداش هستند که یادگیر در وضعیت‌های مختلف، عملیـات مختلفی را انجام داده و پاداش‌های متفاوتی دریافت و بر اســـاس مجموع پاداش‌های دریافتی، عمل متناســـب با هر وضعیت را یاد می‌گیرد.

انواع یادگیری از یک دیدگاه موارد ۱، ۲ و ۳ می‌باشد، و از دیدگاه دیگری موارد ۱، ۲، ۴ و ۵ می‌باشد.

مبنای ارزیابی الگوریتم‌های یادگیری ماشین

- دقت دسته‌بندی
- صحت راه‌حل و کیفیت آن
- سرعت عملکرد

مثال: ماشـینی داریم که کار آن جداسـازی مربع از مثلث اسـت. فرض می‌کنیم که خروجی این ماشـین، مربع‌ها و مثلث‌های داخل شکل بسته باشد.



تعریف اصلاحات مهم

– **مثبت صحیح (True Positive):** تعداد داده‌هایی که به درستی تشخیص داده است.

در مثال قبل، مثبت صحیح تعداد مربع‌هایی است که یادگیرنده مربع تشخیص داده است؛ یعنی ۴ مربع.

– **مثبت کاذب (False Positive):** تعداد داده‌هایی که به غلط تشخیص داده است.

در مثال قبل، مثبت کاذب تعداد مثلث‌هایی است که یادگیرنده مربع تشخیص داده است؛ یعنی ۲ مثلث.

– **منفی صحیح (True Negative):** تعداد داده‌هایی که به درستی تشخیص نداده است.

در مثال قبل، منفی صحیح تعداد مثلث‌هایی است که یادگیرنده مربع تشخیص نداده است؛ یعنی ۳ مثلث.

– **منفی کاذب (False Negative):** تعداد داده‌هایی که به غلط تشخیص نداده است.

در مثال قبل، منفی کاذب تعداد مربع‌هایی است که یادگیرنده مربع تشخیص نداده است؛ یعنی ۱ مربع.

فاکتورها (سنجه‌های) یک سیستم یادگیرنده‌ی با نظارت

– **صحت (Precision)**

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP}$$

برای مثال قبل، داریم:

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \%66$$

– **بازخوانی (Recall)**

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN}$$

برای مثال قبل، داریم:

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} = \%80$$

– **دقت (Accuracy)**

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

برای مثال قبل، داریم:

$$Accuracy = \frac{TP+TN}{TP+FP+TN+FN} = \frac{4+3}{4+2+3+1} = \frac{7}{10} = \%70$$

به جای دو معیار صحت و بازخوانی، می‌توان از یک معیار ترکیبی به نام F-measure استفاده نمود.

$$F - measure = \frac{2 \times Precision \times Recall}{Precision + Recall}$$

نکته: بیشترین مقدار F-measure زمانی است که صحت و بازخوانی تقریباً با هم برابر باشند.

نکته: پارامتر F-measure به این دلیل اهمیت دارد که مثلاً ممکن است یک سیستم، صحت ۱۰۰٪ داشته باشد ولی بازخوانی آن کم باشد، در نتیجه سیستم خوبی نیست یا ممکن است یک سیستم، بازخوانی ۱۰۰٪ داشته باشد ولی صحت آن کم باشد، در نتیجه باز هم سیستم خوبی نیست. زمانی یک سیستم خوب است که بین صحت و بازخوانی آن، توازن وجود داشته باشد. مثلاً یکی ۶۰٪ و دیگری ۷۰٪ باشد.

ماتریس درهم‌ریختگی (Confusion Matrix)

مثال: ماتریس درهم‌ریختگی مثال قبل را رسم کنید.

هدف (target) \ خروجی (output)	مربع (کلاس ۱)	مثلث (کلاس ۲)	بازخوانی	
مربع (کلاس ۱)	4	1	$\frac{4}{5} = \%80$	
مثلث (کلاس ۲)	2	3	$\frac{3}{5} = \%60$	
صحت	$\frac{4}{6} = \%66$	$\frac{3}{4} = \%75$	$\frac{7}{10} = \%70$	دقت
			دقت	

نکته: صحت و بازخوانی برای یک کلاس یا دسته انتخاب می‌شود، در حالی‌که دقت برای کل کلاس‌ها انتخاب می‌شود.

نکته: در سطر اول ماتریس درهم‌ریختگی فوق، هدف تشخیص مربع (کلاس ۱) است. در خروجی ۴ تا از کل مربع‌ها را مربع، و ۱ مربع را مثلث تشخیص داده است. این اعداد در سطر اول ماتریس درهم‌ریختگی نوشته می‌شود.

نکته: در سطر دوم ماتریس درهم‌ریختگی فوق، هدف تشخیص مثلث (کلاس ۲) است. در خروجی ۲ تا از کل مثلث‌ها را مربع، و ۳ مثلث را مثلث تشخیص داده است. این اعداد در سطر دوم ماتریس درهم‌ریختگی نوشته می‌شود.

نکته: گاهی اوقات ماتریس درهم‌ریختگی را با درصد بیان می‌کنند:

هدف (target) \ خروجی (output)	مربع (کلاس ۱)	مثلث (کلاس ۲)	بازخوانی	
مربع (کلاس ۱)	%40	%10	%80	
مثلث (کلاس ۲)	%20	%30	%60	
صحت	%66	%75	%70	دقت
			دقت	

مثال: یک سیستم یادگیر برای تشخیص میوه‌های سیب، گلابی و موز داریم و ماتریس درهم‌ریختگی آن به شکل زیر است.

هدف (target) / خروجی (output)	موز (کلاس ۱)	گلابی (کلاس ۲)	سیب (کلاس ۳)	بازخوانی	
موز (کلاس ۱)	8	1	1	$\frac{8}{10} = \%80$	
گلابی (کلاس ۲)	2	3	1	$\frac{3}{6} = \%50$	
سیب (کلاس ۳)	1	7	2	$\frac{2}{10} = \%20$	
صحت	$\frac{8}{11} = \%72$	$\frac{3}{11} = \%27$	$\frac{2}{4} = \%50$	$\frac{13}{26} = \%50$	دقت

دقت

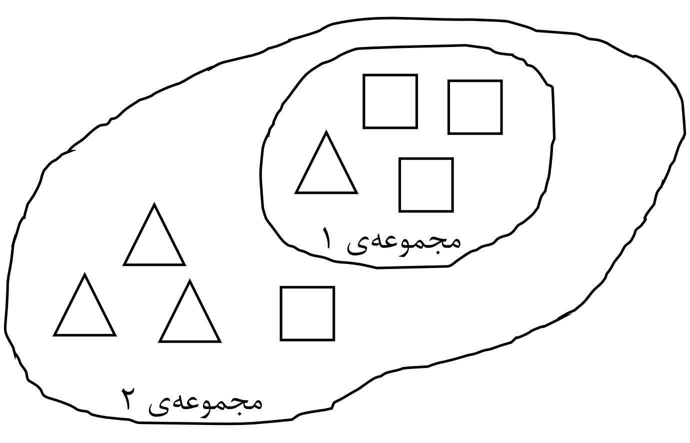
این سیستم یادگیر در تشخیص موز، خوب عمل کرده است (Recall=%80)، اما در تشخیص سیب، خوب عمل نکرده است (Recall=%20).

اگر در یک سیستم یادگیر، F-measure در یکی از دسته‌های بالا باشد می‌توان گفت که سیستم موفقی است.

مثال: یک سیستم یادگیر داریم که افراد بیمار را از افراد سالم جدا می‌کند تا آن‌ها را مورد مداوا قرار بدهیم. این جداسازی به دو صورت ممکن است که در شکل زیر با مجموعه‌های ۱ و ۲ مشخص شده است. بهتر است کدام مجموعه را در نظر بگیریم؟

فرد سالم: □

فرد بیمار: △



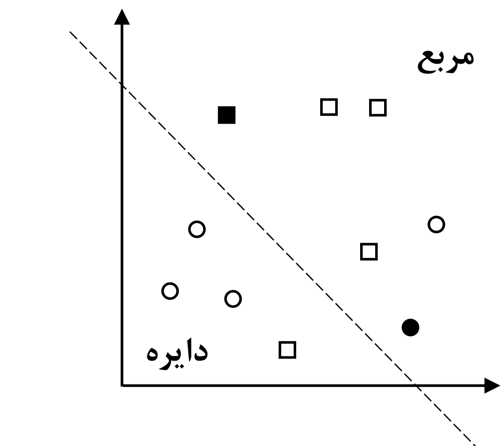
بهتر است مجموعه‌ای که در نظر می‌گیریم، کلی‌تر باشد (تمام افراد بیمار را باید در نظر بگیریم). مثلاً ممکن است در مجموعه‌ی ۱ ، F-measure ،Recall و ... بیشتر باشد، اما برای ما اهمیت دارد که تمام افراد بیمار در مجموعه‌ی ما باشند.

نکته: F-measure و Accuracy (دقت) معمولاً اهمیت بیشتری دارند، اما بعضی مواقع Precision (صحت) نیز اهمیت پیدا می‌کند.

مثال: اگر ۱۰۰۰ داده را بخواهیم به یک یادگیر ماشین بدهیم، ۸۰۰ داده‌ی آن را بابت آموزش به سیستم می‌دهیم و ۲۰۰ داده‌ی دیگر را بابت تست به سیستم می‌دهیم (معمولاً ۷۰ تا ۸۰ درصد داده‌ها را بابت آموزش و درصد باقی‌مانده را بابت تست به سیستم یادگیر می‌دهند).

مثال: در نمودار زیر، مربع‌ها باید بالای خط‌چین و دایره‌ها باید پایین خط‌چین قرار بگیرند. مربع‌ها و دایره‌های توخالی مربوط به آموزش (Train)، و مربع‌ها و دایره‌های توپُر مربوط به تست (Test) می‌باشند.

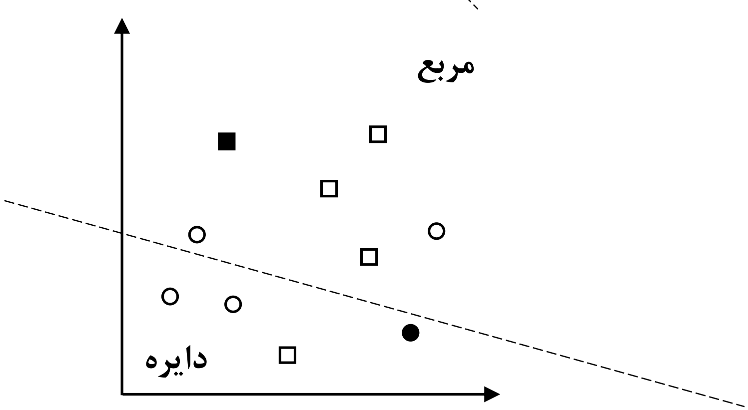
مرحله‌ی اول:



$$\text{دقت آموزش} = \frac{6}{8} = \%75$$

$$\text{دقت تست} = \frac{1}{2} = \%50$$

مرحله‌ی دوم:



$$\text{دقت آموزش} = \frac{5}{8} = \%62.5$$

$$\text{دقت تست} = \frac{2}{2} = \%100$$

تعادل در مرحله‌ی اول بهتر است. بالانس و توازن بیشتری دارد و معقول‌تر می‌باشد.

نکته: اگر هر دو دقت آموزش و تست بالا باشند، بهتر است؛ در غیر این‌صورت آن‌که تفاوت دقت آموزش و تستش کمتر است، بهتر می‌باشد.

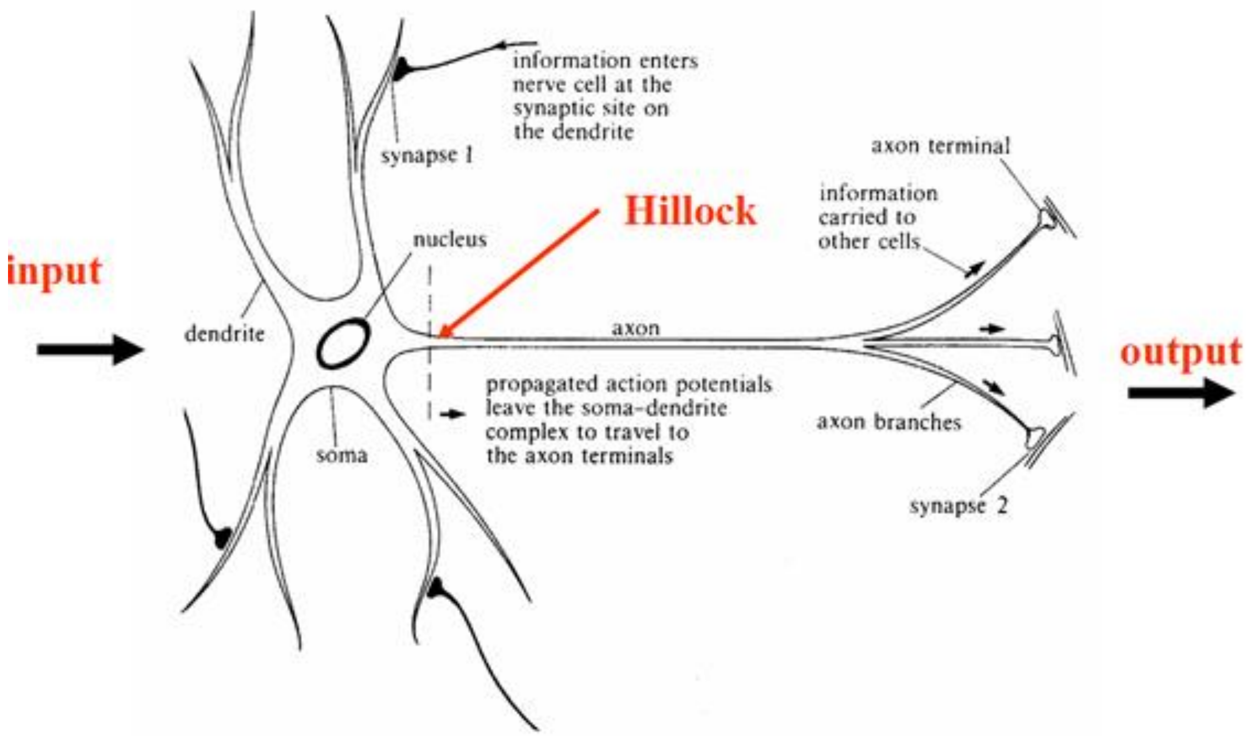
ایده‌ی اصلی این شبکه‌ها مبتنی بر «شبکه‌های عصبی زیستی» است. همان‌طور که می‌دانیم، بسیاری از مسائل توسط انسان به سادگی قابل حل می‌باشد و مغز انسان می‌تواند به صورت موازی محاسبات را انجام دهد.

این مدل می‌تواند برای مسائلی که توسط ذهن آدمی به راحتی انجام می‌شود، مفید باشد. در واقع شیوه‌ی به‌کاررفته در ذهن، به نوعی الهام‌بخش ارائه‌ی مدلی برای ایجاد قابلیت‌هایی مشابه با مغز است.

ساختار یک نرون طبیعی

گمان می‌رود که مغز انسان بالغ از تعداد 10^{11} نرون (۱۰۰ میلیارد سلول عصبی)تشکیل شده باشد که هر نرون با تقریباً 10^{4} نرون دیگر در ارتباط است و به صورت فوق‌العاده‌ای به هم پیوسته هستند. سرعت سوئیچینگ نرون‌ها در حدود 10^{-3} ثانیه است که در مقایسه با کامپیوترها (10^{-10} ثانیه) بسیار ناچیز می‌نماید. با این وجود، آدمی قادر است در ۰/۱ ثانیه تصویر یک انسان را بازشناسایی نماید، ولی برای کامپیوتر دقایقی طول می‌کشد که این بازشناسی انجام شود.

هر نرون، شامل یک آسه (اکسون) است که شاخه‌شاخه شده و پیام‌های الکتریکی را به بیرون سلول هدایت می‌کند و نیز یک خوشه از دارینه (دِندریت) که پیام‌های الکتریکی را از سلول‌های مجاور دریافت می‌کند. اکسونِ یک نرون، به دِندریتِ نرون دیگر وصل است که به محل اتصال این دو همایه (سیناپس) می‌گویند.



همایه یک ساختار زیستی در پایانه‌ی اکسون‌هاست که از راه آن، یک سلول عصبی پیام خود را به دِندریت یک نورون دیگر یا یاخته‌ی ماهیچه‌ای یا یک غده می‌فرستد.

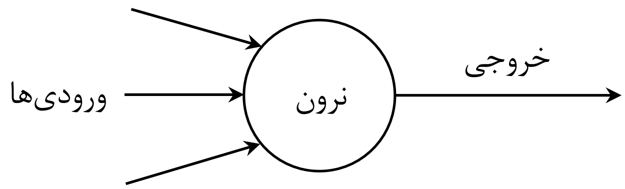
جسم سلولی مولد سیگنال‌های ارسالی است. در صورتی که میزان سیگنال دریافتی از طریق دارینه‌ها از یک حدّ آستانه بیشتر باشد، نرون تحریک می‌شود.

شبکه‌ی عصبی از طریق یادگیری از محیط اطراف، کسب دانش می‌کند و برای ذخیره‌سازی دانش از وزن‌های سیناپسی استفاده می‌نماید.

قابلیت شبکه‌های عصبی در یادگیری، عمدتاً بهتر است و کاربردی‌تر از بقیه‌ی روش‌های یادگیرنده است.

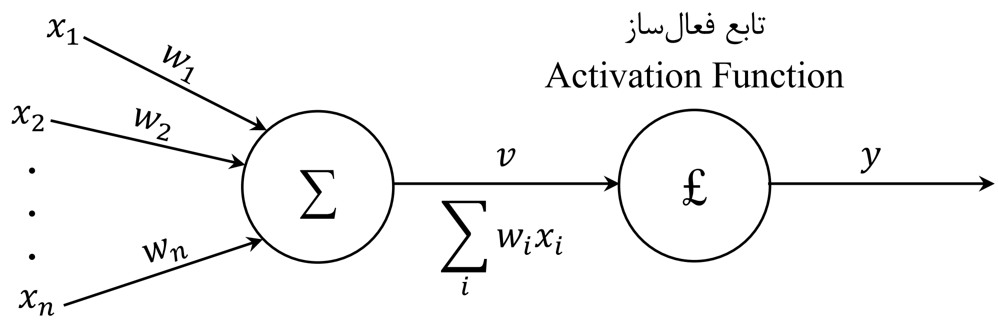
شبکه‌ی عصبی مصنوعی

نرون، کوچک‌ترین واحد پردازش‌گر اطلاعات است.



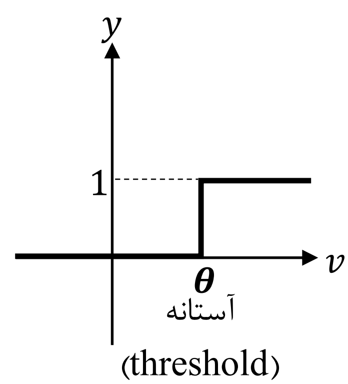
در مدل نرون ارائه‌شده در شکل، دو اتفاق می‌افتد.

مدل ریاضی یک نرون



$$v = \sum_i w_i x_i \quad , \quad y = f(v) \quad , \quad y = f(\sum_i w_i x_i)$$

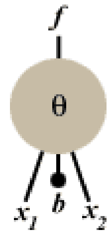
$hardlim$ تابع فعال‌ساز : $y = f(v) = \begin{cases} 1 & v \geq \theta \\ 0 & otherwise \end{cases}$



هر نرون دارای یک حدّ برانگیختگی است. اگر مجموع ورودی‌های نرون به یک حدّی برسد، نرون تحریک می‌شود و در راستای اکسون خود یک پیام ارسال می‌کند. به طور کلی زمانی یک نرون تحریک می‌شود که یا تعداد زیادی ورودی کم به آن ارسال شود یا یک ورودی خیلی زیاد به آن ارسال شود.

پرسپترون (Perceptron)

پرسپترون ساده‌ترین نوع مدل‌سازی نرون است. پرسپترون دارای یک‌سری ورودی خارجی، یک ورودی داخلی به نام بایاس یا b (bias)، یک آستانه (threshold) و یک خروجی است که در شکل زیر می‌توانید آن را ببینید.



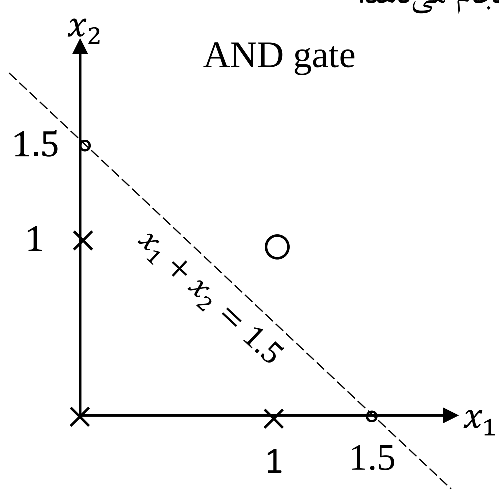
یک پرسـپترون، یک بردار ورودی را گرفته، ترکیبی خطی از آن‌ها را محاسـبه نموده و خروجی را فراهم می‌آورد. اگر خروجی از میزان آستانه‌ای بالاتر بود، مقدار یک و در غیر این‌صورت مقدار صفر (منهای یک) برمی‌گرداند.

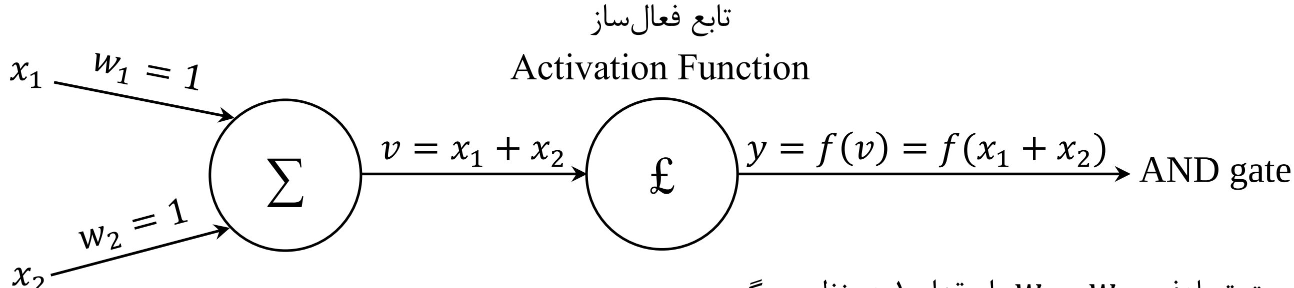
هر پرسـپترون نشـان‌دهنده و معرّف یک نرون است. ورودی پرسپترون‌ها معمولاً از جنس boolean است، اما در کل می‌تواند هر عددی باشد، ولی خروجی همیشه یک boolean است.

مثال: یک گیت AND را توسط نرون پیاده‌سازی کنید.

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

باید یک یادگیر ماشـین طراحی کنیم که دایره را از ضـربدر جدا کند. دایره نماینده‌ی مقدار یک و ضـربدر نماینده‌ی مقدار صفر می‌باشد. خط‌چینی به معادله‌ی $x_1 + x_2 = 1.5$ این کار را انجام می‌دهد.





به صورت تصادفی، w_1 و w_2 را مقدار ۱ در نظر می‌گیریم.

$$w_1 = 1 \ , \ w_2 = 1 \ \Rightarrow \ v = \sum_i w_i x_i = x_1 + x_2$$

$$v = x_1 + x_2 \quad , \quad y = f(v) = f(x_1 + x_2) \quad , \quad f = hardlim \quad , \quad \theta = 1.5$$

$hardlim$ تابع فعال‌ساز : $y = f(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 1.5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

اگر $x_1 = 0.5$ و $x_2 = 0.7$ باشد، آن‌گاه $v = x_1 + x_2 = 1.2$ و در نتیجه $net(0.5,0.7) = 0$ (اسم یادگیرنده)

اگر $x_1 = 0.8$ و $x_2 = 0.9$ باشد، آن‌گاه $v = x_1 + x_2 = 1.7$ و در نتیجه $net(0.8,0.9) = 1$ (اسم یادگیرنده)

نکته: به جای مقادیر ۱/۵ و ۱/۵ که به ترتیب بر روی محورهای x_1 و x_2 در نظر گرفتیم و خط گذرنده از این نقاط را رسم کردیم، می‌توانیم مقادیر ۱/۲۵ و ۱/۲۵ یا مقادیر ۱/۵ و ۱/۲۵ یا مقادیر ۱/۲۵ و ۱/۷۵ یا ... را در نظر بگیریم.

نکته: wها در اینجا به صورت تصادفی در نظر گرفته شده‌اند، اما کلاً منظور از آموزش، مشخص‌کردن همین wهاست تا بتواند ارتباط‌ها را به خوبی کنار هم قرار دهد تا به خروجی مناسبی برسد.

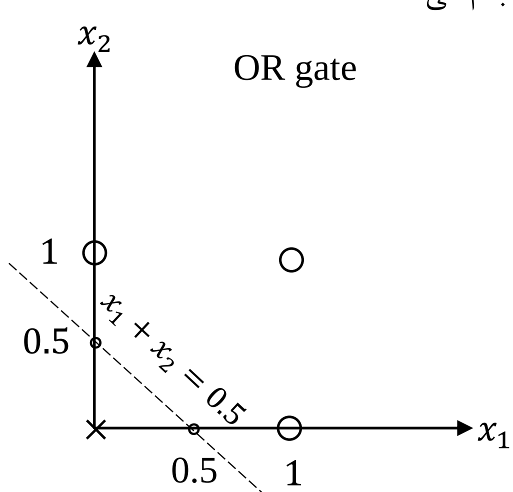
نکته: با تعیین وزن‌ها، باید بهترین نتیجه را بگیریم.

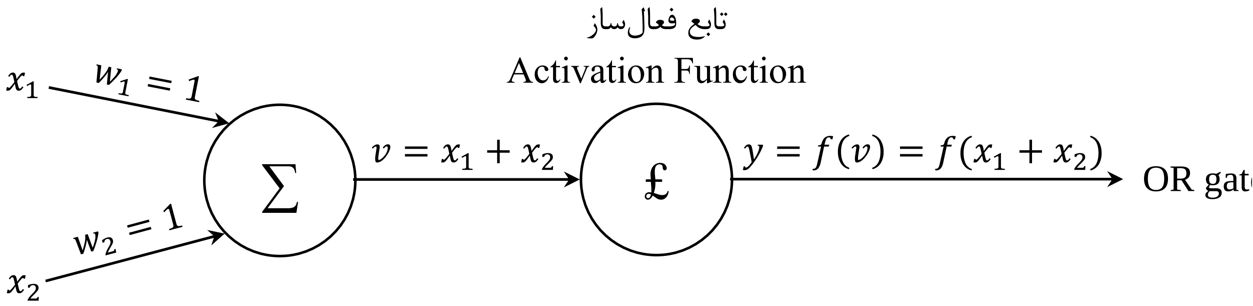
error = target - output

مثال: یک گیت OR را توسط نرون پیاده‌سازی کنید.

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

باید یک یادگیر ماشین طراحی کنیم که دایره را از ضربدر جدا کند. دایره نماینده‌ی مقدار یک و ضربدر نماینده‌ی مقدار صفر می‌باشد. خط‌چینی به معادله‌ی $x_1 + x_2 = 0.5$ این کار را انجام می‌دهد.





به صورت تصادفی، w_1 و w_2 را مقدار ۱ در نظر می‌گیریم.

$$w_1 = 1 \ , \ w_2 = 1 \ \Rightarrow \ v = \sum_i w_i x_i = x_1 + x_2$$

$$v = x_1 + x_2 \quad , \quad y = f(v) = f(x_1 + x_2) \quad , \quad f = hardlim \quad , \quad \theta = 0.5$$

$hardlim$ تابع فعال‌ساز $: y = f(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0.5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

اگر $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ باشد، آن‌گاه $v = x_1 + x_2 = 1$ و در نتیجه $net(0,1) = 1$ (اسم یادگیرنده)

اگر $x_1 = 1$ و $x_2 = 1$ باشد، آن‌گاه $v = x_1 + x_2 = 2$ و در نتیجه $net(1,1) = 1$ (اسم یادگیرنده)

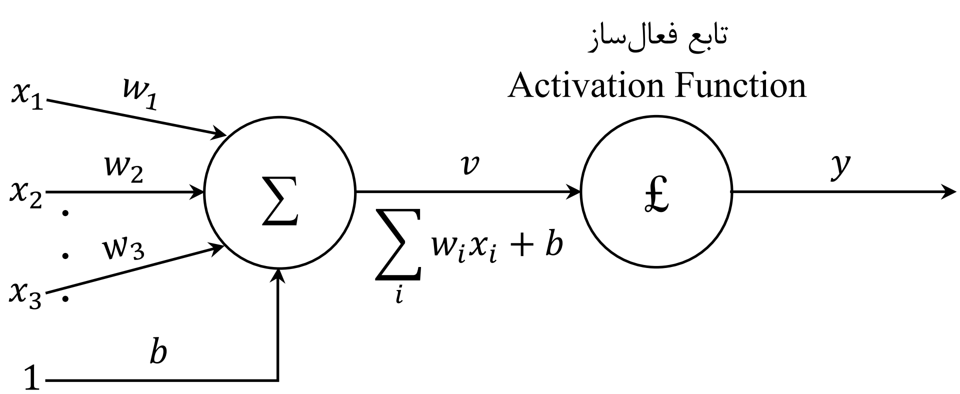
اگر $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ باشد، آن‌گاه $v = x_1 + x_2 = 0$ و در نتیجه $net(0,0) = 0$ (اسم یادگیرنده)

اگر $x_1 = 0.5$ و $x_2 = 0.7$ باشد، آن‌گاه $v = x_1 + x_2 = 1.2$ و در نتیجه $net(0.5,0.7) = 1$ (اسم یادگیرنده)

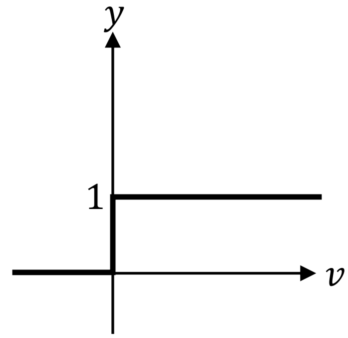
اگر $x_1 = 0.8$ و $x_2 = 0.9$ باشد، آن‌گاه $v = x_1 + x_2 = 1.7$ و در نتیجه $net(0.8,0.9) = 1$ (اسم یادگیرنده)

اگر $x_1 = 0.2$ و $x_2 = 0.1$ باشد، آن‌گاه $v = x_1 + x_2 = 0.3$ و در نتیجه $net(0.2,0.1) = 0$ (اسم یادگیرنده)

به خاطر این‌که تابع فعال‌ساز دست‌کاری نشود و با تغییر θ تغییر نکند، θ را در تابع فعال‌ساز صفر کرده و یک ورودی ۱ با وزن b وارد نرون کرده و $b = -\theta$ را اعمال می‌کنیم. در این‌صـــورت، تابع hardlim تبدیل به تابع پله‌ای (تابع step) می‌شود.



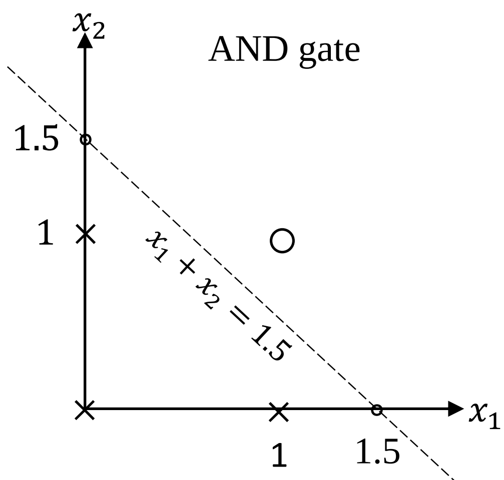
$$v = \sum_i w_i x_i + b \quad , \quad y = f(v) \quad , \quad y = f(\sum_i w_i x_i + b) \quad , \quad b = -\theta$$

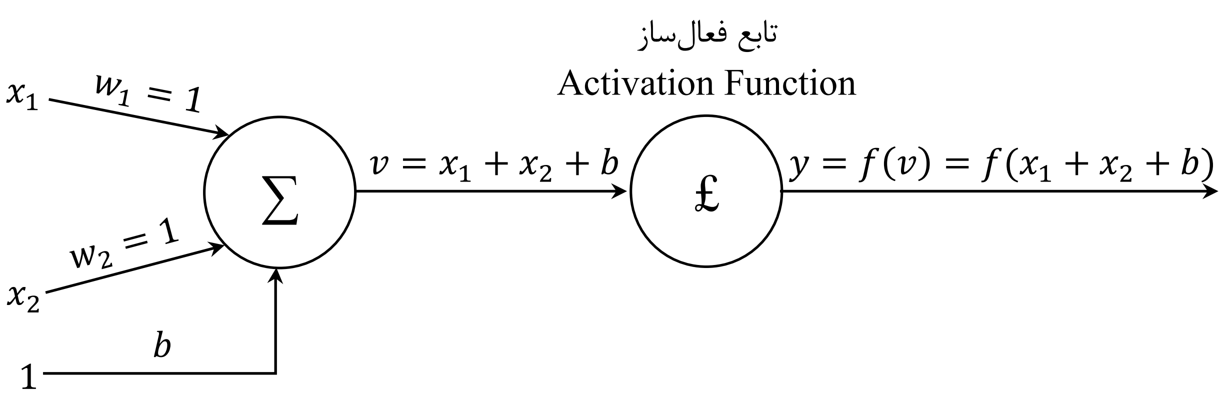


تابع فعال‌ساز پله‌ای : $y = f(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

مثال: یک گیت AND را توسط نرون و با استاده از b پیاده‌سازی کنید.

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1





(معادله‌ی خط‌چین) $x_1 + x_2 = 1.5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 1.5 = 0 \Rightarrow b = -1.5 \\ v = x_1 + x_2 + b = 0 \end{cases}$

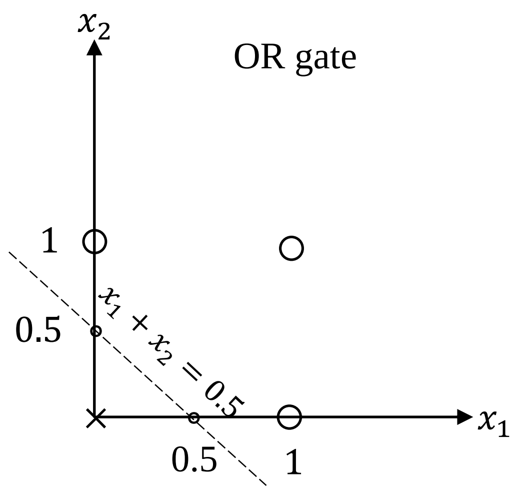
$$w_1 = 1 \;,\; w_2 = 1 \;\Rightarrow\; v = \sum_i w_i x_i + b = x_1 + x_2 - 1.5$$

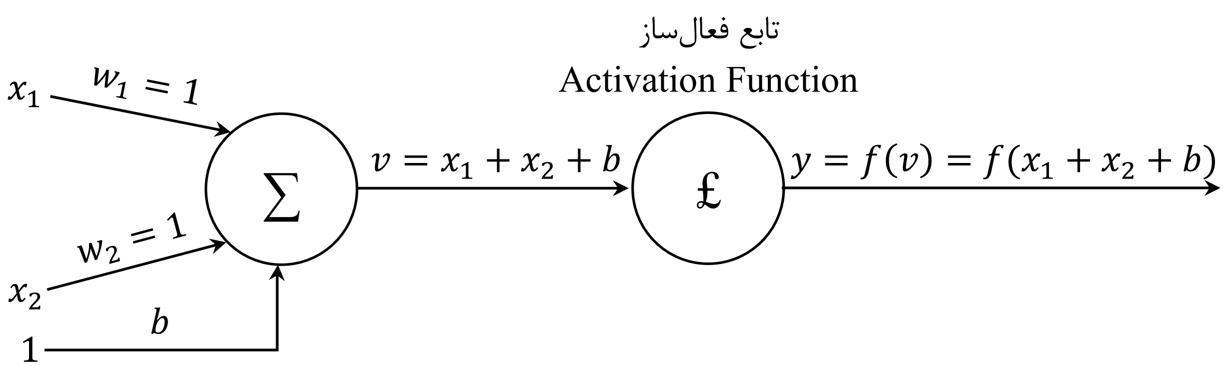
$$v = x_1 + x_2 - 1.5 \quad , \quad y = f(v) = f(x_1 + x_2 - 1.5) \quad , \quad f = step \quad , \quad \theta = -b = 1.5$$

تابع فعال‌ساز پله‌ای : $y = f(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

مثال: یک گیت OR را توسط نرون و با استاده از b پیاده‌سازی کنید.

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1





(معادله‌ی خط‌چین) $x_1 + x_2 = 0.5 \;\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 0.5 = 0 \;\Rightarrow\; b = -0.5 \\ v = x_1 + x_2 + b = 0 \end{cases}$

$$w_1 = 1 \;,\; w_2 = 1 \;\Rightarrow\; v = \sum_i w_i x_i + b = x_1 + x_2 - 0.5$$

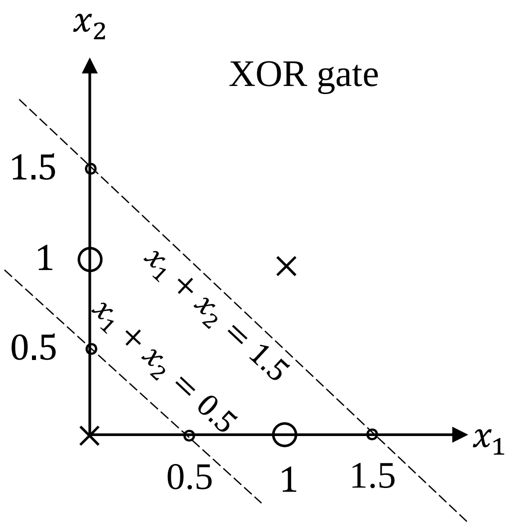
$$v = x_1 + x_2 - 0.5 \quad , \quad y = f(v) = f(x_1 + x_2 - 0.5) \quad , \quad f = step \quad , \quad \theta = -b = 0.5$$

تابع فعال‌ساز پله‌ای : $y = f(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

مثال: یک گیت XOR را توسط نرون پیاده‌سازی کنید.

x_1	x_2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

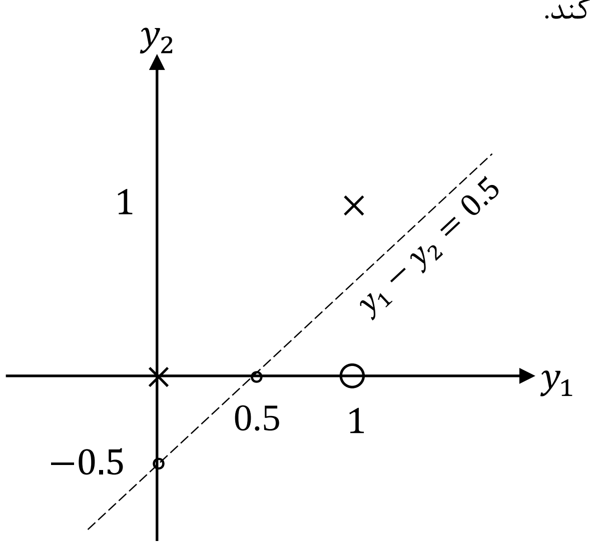
باید یک یادگیر ماشـین طراحی کنیم که دایره را از ضـربدر جدا کند. دایره نماینده‌ی مقدار یک و ضـربدر نماینده‌ی مقدار صفر می‌باشد. دو خطچین به معادله‌های $x_1 + x_2 = 1.5$ و $x_1 + x_2 = 0.5$ این کار را انجام می‌دهند.

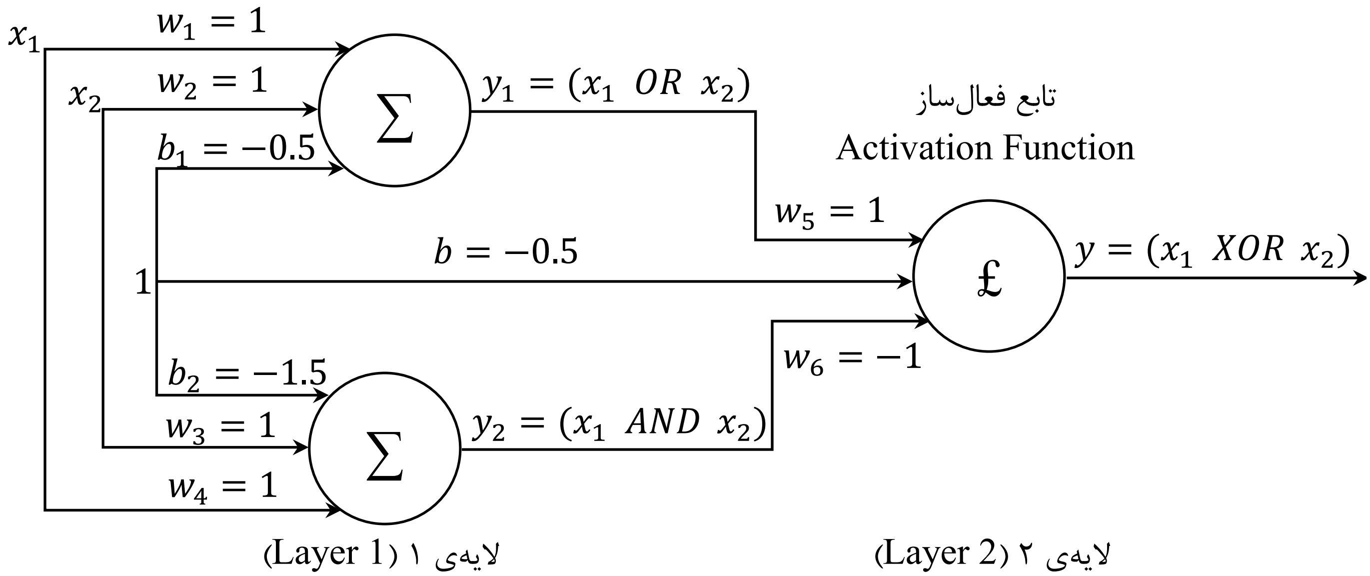


می‌بایست کاری کنیم که این دو خطچین، تبدیل به یک خطچین شود تا بتوانیم توسط نرون، آن را پیاده‌سازی کنیم.
برای این کار، معادلات $y_1 = (x_1\ \ OR\ \ x_2)$ و $y_2 = (x_1\ \ AND\ \ x_2)$ را وارد جدول می‌کنیم.

x_1	x_2	$y_1 = (x_1\ \ OR\ \ x_2)$	$y_2 = (x_1\ \ AND\ \ x_2)$	$y = (x_1\ \ XOR\ \ x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

حال خطچینی به معادله‌ی $y_1 - y_2 = 0.5$ دایره را از ضربدر جدا می‌کند.





(معادله‌ی خط‌چین) $y_1 - y_2 = 0.5 \;\Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_2 - 0.5 = 0 \;\Rightarrow\; b = -0.5 \\ y_1 - y_2 + b = 0 \end{cases}$

$$w_1 = 1 \;,\; w_2 = 1 \;\Rightarrow\; y_1 = \sum_i w_i x_i + b_1 = x_1 + x_2 - 0.5$$

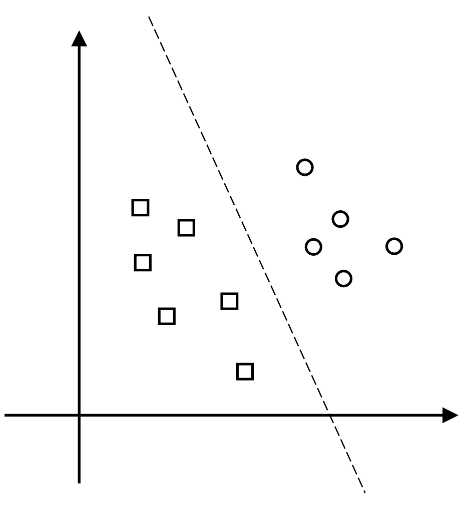
$$w_3 = 1 \;,\; w_4 = 1 \;\Rightarrow\; y_2 = \sum_i w_i x_i + b_2 = x_1 + x_2 - 1.5$$

$$y = f(y_1 - y_2 + b) \quad , \quad f = step \quad , \quad \theta = -b = 0.5$$

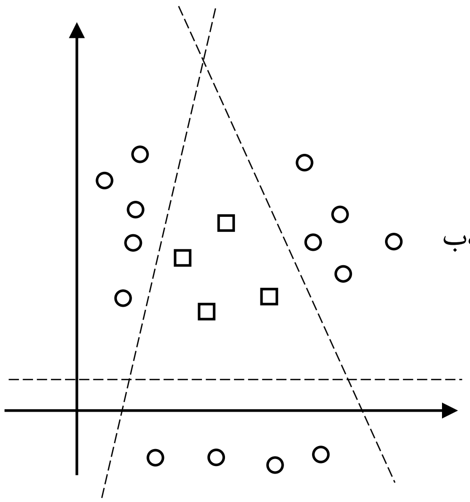
تابع فعال‌ساز پله‌ای : $y = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

نکته: جداکننده می‌تواند خط، صفحه، فضای ۳ بعدی و ... باشد. فرمول صفحه به صورت $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 - \theta = 0$ می‌باشد.

شکل زیر با یک سطح نرون (یک نرون) قابل پیاده‌سازی است.

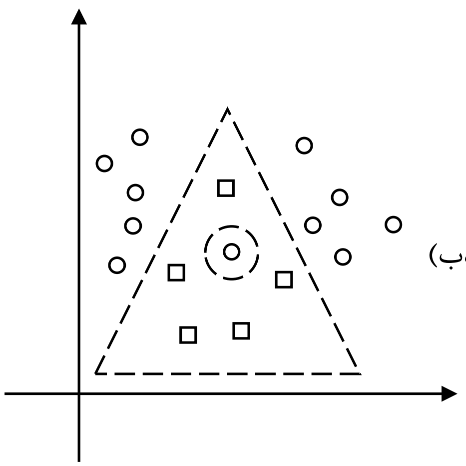


شکل زیر با دو سطح نرون (دو نرون) قابل پیاده‌سازی است.

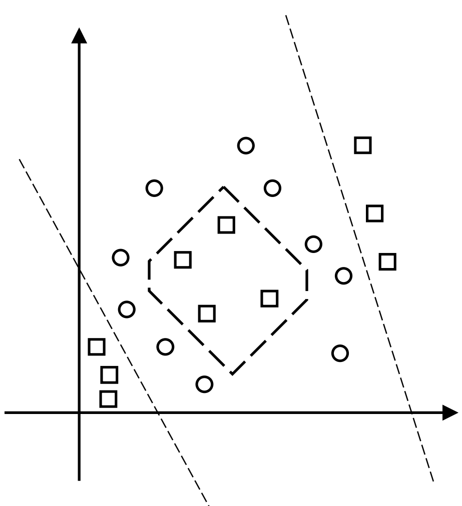


مجموعه‌ی محدب

دو شکل زیر با سه سطح نرون (سه نرون) قابل پیاده‌سازی است.



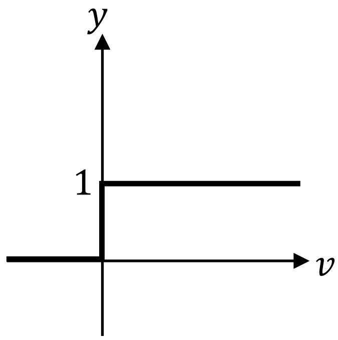
مجموعه‌ی غیرمحدب (متشکل از دو مجموعه‌ی محدب)



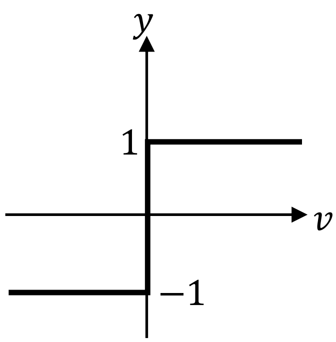
نکته: ناحیه‌هایی که محدب نیستند را می‌توان با سه سطح نرون (سه نرون) پیاده‌سازی کرد.

انواع توابع فعال‌ساز

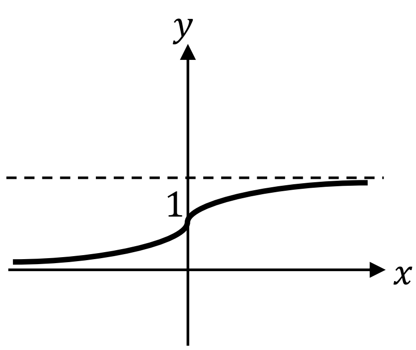
۱- تابع فعال‌ساز پله‌ای (Step): $y = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$



۲- تابع فعال‌ساز علامت (Sign): $y = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ -1 & otherwise \end{cases}$



۳- تابع فعال‌ساز سیگموئیدال (Sigmoid): $y = \frac{1}{1+e^{-ax}}$



نکته: تابع فعال‌ساز سیگموئیدال معروف‌ترین و پرکاربردترین تابع فعال‌ساز است، زیرا نتیجه‌ی خوبی می‌دهد.

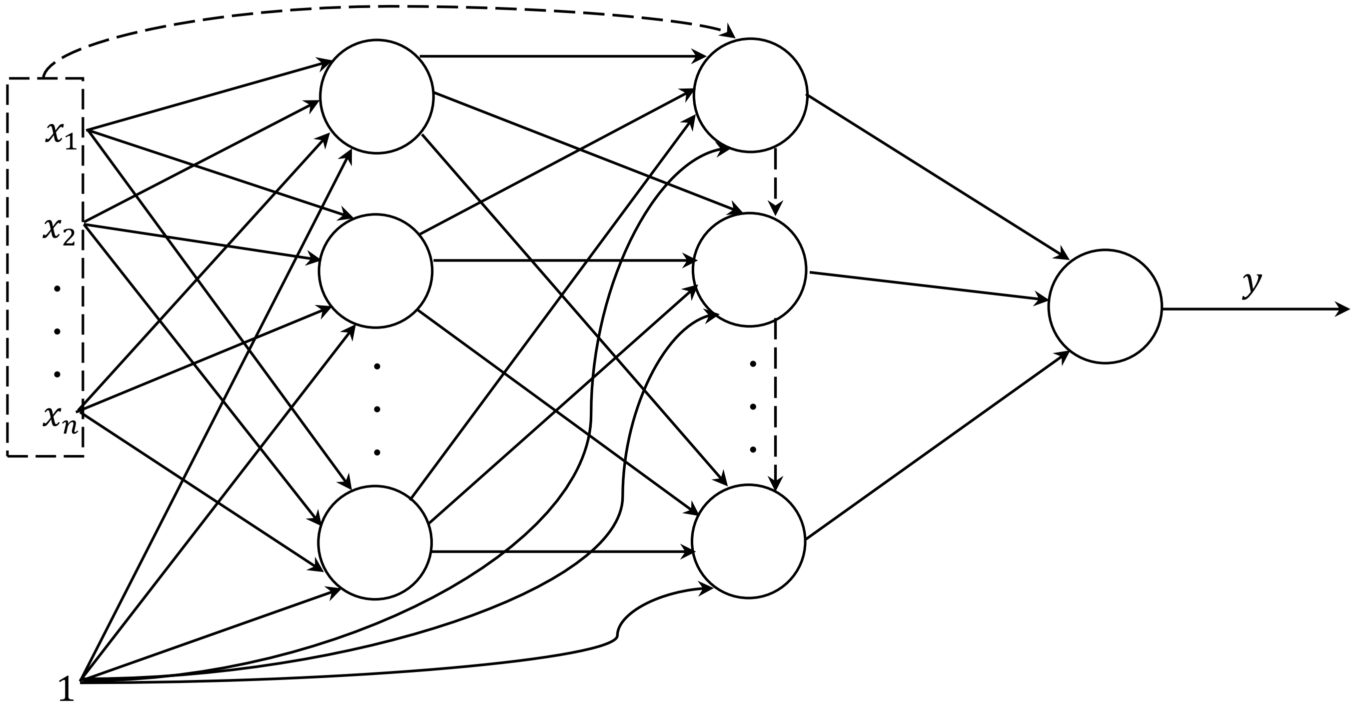
مشتق تابع فعال‌ساز سیگموئیدال: $f'(x) = f(x).\left(1 - f(x)\right)$

شبکه‌های عصبی پرسپترون چند لایه یا MLP (Multi-Layer Perceptron)

یک ویژگی این شبکه‌ها این است که یک نسخه از ورودی‌ها در لایه‌ی پنهان هم وجود دارد. (خط‌چین‌ها در شکل زیر) این شبکه‌ها همگرا می‌شوند و رو به جلو هستند. (شبکه‌های عصبی جلورونده یا Feed-Forward Neural Networks)

تابع فعال‌ساز شبکه‌های MLP سیگموئیدال است.

نکته: یک شبکه‌ی عصبی می‌تواند چندین خروجی داشته باشد که به این شبکه‌های عصبی، بهینه‌ساز چندهدفه می‌گویند.



سطح اول
Layer 1
لایه‌ی ورودی
Input Layer

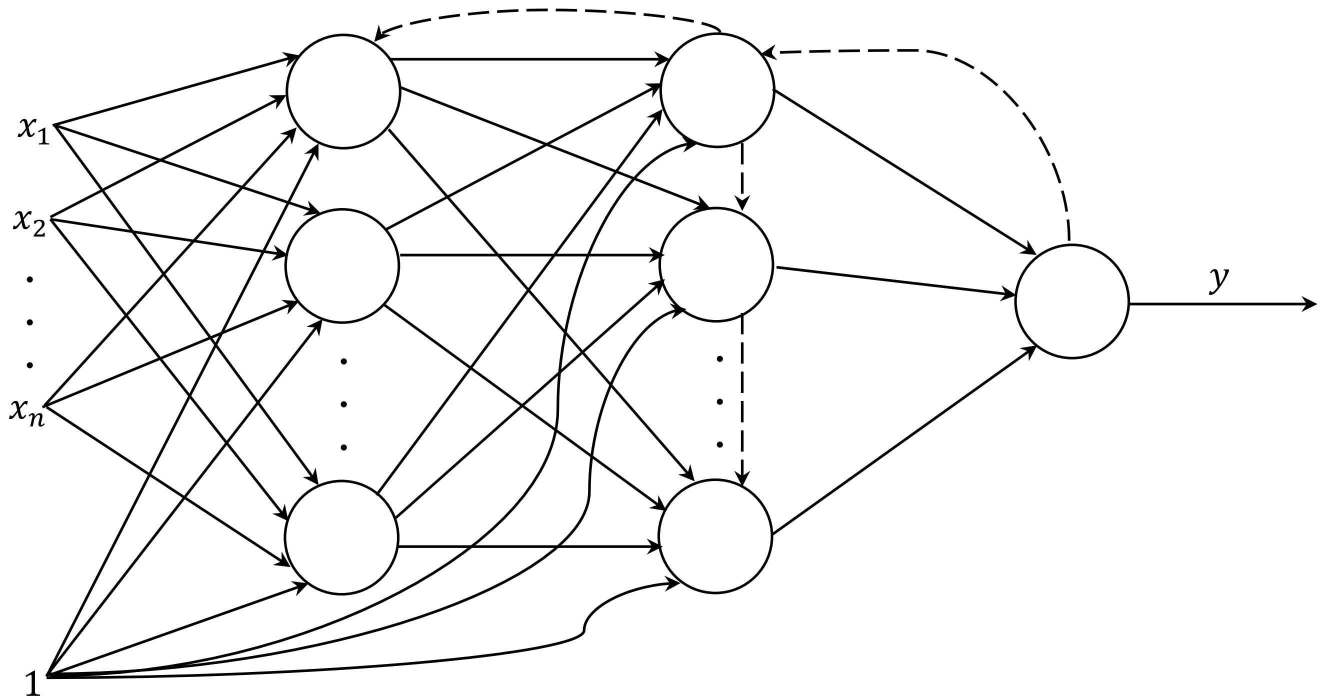
سطح دوم
Layer 2
لایه‌ی پنهان
Hidden Layer

سطح سوم
Layer 3
لایه‌ی خروجی
Output Layer

شبکه‌ی عصبی هاپفیلد (Hopfield)

ویژگی برخی از شبکه‌ها این است که خروجیِ لایه‌ی خروجی به لایه‌های قبلی وارد می‌شود. این شبکه‌ها نتیجه‌ی همگرا ندارند. عقل انسان این‌گونه است. (شبکه‌های عصبی برگشت‌پذیر یا Recurrent Neural Networks)

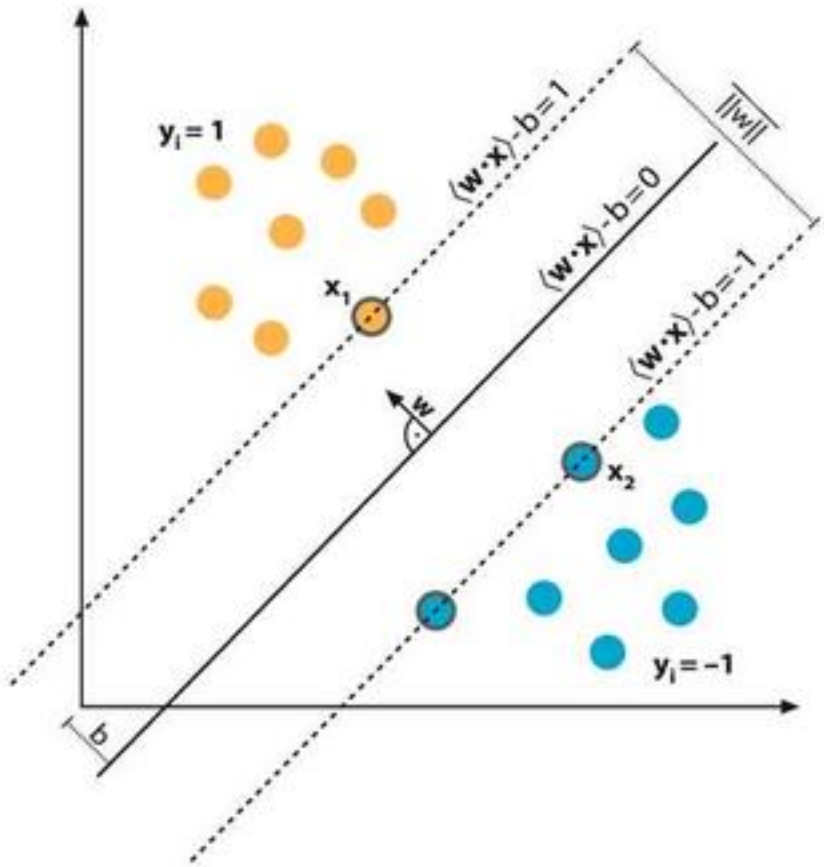
شبکه‌ی عصبی هاپفیلد، یکی از قدیمی‌ترین انواع شبکه‌های عصبی است که دارای ساختار بازگشتی است و در ساختار آن، فیدبک‌های داخلی وجود دارند. این شبکه از نوع شبکه‌های عصبی برگشت‌پذیر (Recurrent) می‌باشد.



سطح اول	سطح دوم	سطح سوم
Layer 1	Layer 2	Layer 3
لایه‌ی ورودی	لایه‌ی پنهان	لایه‌ی خروجی
Input Layer	Hidden Layer	Output Layer

شبکه‌های عصبی توابع پایه شعاعی یا RBF (Radial Basis Functions)

از نظر ساختار کلی، شبکه‌های عصبی RBF تفاوت چندانی با شبکه‌های MLP ندارند و صرفاً نوع پردازشی که نرون‌ها روی ورودی‌هایشان انجام می‌دهند، متفاوت است. با این حال، شبکه‌های RBF غالباً دارای فرایند یادگیری و آماده‌سازی سریع‌تری هستند. در واقع، به دلیل تمرکز نرون‌ها بر محدوده‌ی عملکردی خاص، کار تنظیم آن‌ها راحت‌تر خواهد بود.



کمینه‌کردن خطا

مثال: در یک شبکه‌ی عصبی، مقادیر زیر را داریم.

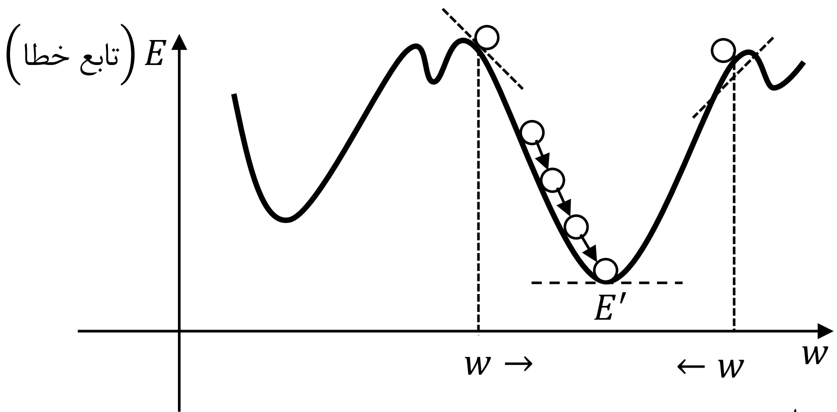
x_1	x_2	x_3	$t\ (target)$	$y(output)$	$e\ (error) = t - y$
2	3	8	12	11.7	0.3
3	4	9	18	19.2	-1.2
8	3	1	15	14.1	0.9

$$e = t - y$$

$$e = \sum |t(n) - y(n)| \qquad \left(n \text{ نمونه‌های آموزش است}\right)$$

$$\left(\text{تابع خطا}\right) E = \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(t-y)^2$$

شیب منفی E ، w را افزایش می‌دهد   شیب مثبت E ، w را کاهش می‌دهد



پارامتر آزاد برای تابع خطا (هزینه)، وزن‌ها هستند.

باید به گونه‌ای عمل کرد که تابع خطا (E) طی فرآیند آموزش کمتر شود.

$$E(w_{i+1}) < E(w_i)$$

هدف یافتن وزن بهینه‌ای (w^*) است که به ازی آن، تابع خطا مینیمم شود.

$$E(w^*) \leq E(w)$$

شرط لازم برای وجود وزن بهینه این است که:

$$\nabla E(w^*) = 0$$

هدف به حداقل‌رساندن مقدار E است. بنابراین از رابطه‌ی $E = \frac{1}{2}e^2$ نسبت به w مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial E}{\partial w} = \frac{\partial E}{\partial e} . \frac{\partial e}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial w}$$

$$(1)\ E = \frac{1}{2}e^2 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial e} = e \quad , \quad (2)\ e = t - y \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial y} = -1$$

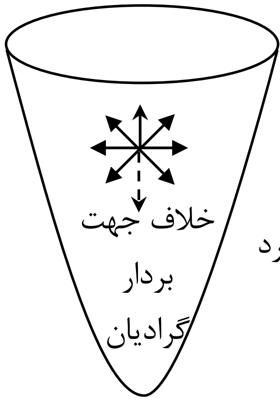
$$(3)\ y = f(v) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial v} = f'(v) \quad , \quad (4)\ v = \sum_i w_i x_i + b \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial w} = x_i$$

از روابط (1) ، (2) ، (3) و (4) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial E}{\partial w} = e.(-1).f'(v).x_i = -e.f'(v).x_i$$

اگر w به صورت برداری باشد ($w(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$)، آنگاه مسأله‌ی گرادیان پیش می‌آید و مشتق به گرادیان (مشتق جزئی چندبعدی) تبدیل می‌شود.

$$\nabla E = (\frac{\partial E}{\partial w_1}, \frac{\partial E}{\partial w_2}, \frac{\partial E}{\partial w_3}, \dots, \frac{\partial E}{\partial w_n})$$



برای کاهش مقدار مشتق، باید خلاف (منهای) جهت بردار گرادیان حرکت کرد

$$w_{i+1} = w_i - \eta \frac{\partial E}{\partial w}$$

اگر η را بزرگ در نظر بگیریم، پـایداری از بین می‌رود. اگر η را خیلی کوچک در نظر بگیریم، ســـرعت همگرایی کم می‌شود. پس باید یک η متناسب انتخاب کنیم.

بهینه‌سازی (Optimization)

بهینه‌سازی گاهی اوقات به معنای کمینه‌کردن و گاهی اوقات به معنای بیشینه‌کردن می‌باشد.

مثال: مقدار x را از رابطه‌ی $\min[(x-2)^2]$ بدست آورید (مسأله‌ی بهینه‌سازی بدون محدودیت یا UnConstraint).

جواب: چون مقدار $(x-2)^2$ مقداری مثبت می‌باشد، پس $\min[(x-2)^2]=0$ و داریم:

$$(x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

مثال: مقدار $\min[x]$ را حساب کنید (مسأله‌ی بهینه‌سازی با محدودیت یا Constraint).

$$\begin{cases} \min[x]=? & \text{(تابع هدف)} \\ x \geq 4 & \text{(محدودیت)} \end{cases}$$

جواب: چون در این مثال، محدودیت $x \geq 4$ وجود دارد، بنابراین جواب مثال $\min[x]=4$ خواهد شد.

مثال: حل مسأله‌ی $\min[x^3+4x^2-x+5]$ ، یک مسأله‌ی بهینه‌سازی بدون محدودیت است.

مثال: حل مسأله‌ی $\begin{cases} \min[xy+yz^2-3xz] \\ x+y \geq 4 \quad , \quad z(x-y) \leq 8 \end{cases}$ ، یک مسأله‌ی بهینه‌سازی با محدودیت است.

مثال: یک سری سکه‌های ۱۰، ۸، ۵ و ۱ تومانی داریم. می‌خواهیم با حداقل تعداد سکه‌ها، مقدار ۲۰ تومان را بسازیم. این کار چگونه ممکن است؟

جواب: جواب‌های ممکن (Feasible Solutions):

(۱۰،۱۰) ، (۱۰،۵،۵) ، (۱۰،۸،۱،۱) ، (۵،۵،۵،۵) ، ...

اگر x_i تعداد سکه‌های iام باشد، داریم:

$$\begin{cases} \min(x_1+x_2+x_3+x_4) & \text{(تابع هدف)} \\ 10x_1+8x_2+5x_3+x_4=20 & \text{(محدودیت)} \end{cases}$$

به این عمل، مدل‌سازی می‌گویند.

جواب این مثال، دو سکه‌ی ۱۰ تومانی است.

انواع برنامه‌نویسی

۱- برنامه‌نویسی عدد صحیح یا IP (Integer Programming): مقدار متغیرها باید عدد صحیح باشد.

۲- برنامه‌نویسی عدد صحیح باینری یا BIP (Binary Integer Programming): مقدار متغیرها باید عدد صحیح باینری باشد.

۳- برنامه‌نویسی ترکیبی (Mix Programming): مقدار متغیرها می‌تواند عدد صحیح یا مقدار آزاد باشد.

انواع بهینه‌سازی

بر اساس انواع برنامه‌نویسی، انواع بهینه‌سازی‌های زیر را داریم:

۱- بهینه‌سازی عدد صحیح یا IO (Integer Optimization): وقتی متغیرها فقط مقدار صحیح می‌توانند داشته باشند.

۲- بهینه‌سازی عدد صحیح باینری یا BIO (Binary Integer Optimization): وقتی متغیرها فقط مقدار صحیح باینری می‌توانند داشته باشند.

۳- بهینه‌سازی ترکیبی (Mix Optimization): اگر تعدادی از متغیرها مقادیر عدد صحیح و تعدادی دیگر مقادیر آزاد داشته باشند.

مثال: مسأله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد (TSP) یک مسأله‌ی بهینه‌سازی است. در واقع، مسأله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد کمینه‌کردن مسیر است با توجه به یک‌سری شروط، مانند: ۱) از همه‌ی شهرها عبور کند ۲) از یک شهر دو بار عبور نکند و ... .

حل مسائل بهینه‌سازی

۱- به صورت دقیق حل شود (Exact).

۲- به صورت تقریبی حل شود (Approximate): بازه‌ای پیدا می‌کند که جواب بهینه در آن قرار دارد.

۳- ابتکاری (Heuristic): یک یا چند جواب خوب پیدا می‌کند. الزاماً بهترین جواب (جواب بهینه‌ی سراسری) را پیدا نمی‌کند، بلکه جواب بهینه‌ی محلی پیدا می‌کند.

مثال برای حل تقریبی: مقدار x را از رابطه‌ی $\min[(x^2-2.5)^2]$ بدست آورید.

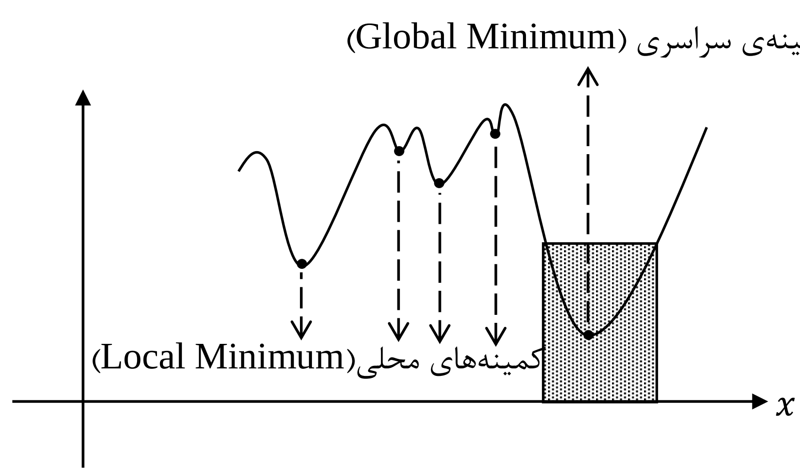
جواب: چون مقدار $(x^2-2.5)^2$ مقداری مثبت می‌باشد، پس $\min[(x^2-2.5)^2]=0$ و داریم:

$$(x^2-2.5)^2=0 \Rightarrow x^2-2.5=0 \Rightarrow x=\sqrt{2.5}=[1.4,1.7] \text{ یا } [-1.4,-1.7]$$

$$\sqrt{2}=1.4 \quad , \quad \sqrt{3}=1.7$$

مثال برای حل ابتکاری: کمینه‌های محلی و سراسری را در نمودار زیر پیدا کنید.

جواب:



نکته: در مثال قبل، کمینه‌ی سراسری با استفاده از روش حل دقیق بدست می‌آید.

نکته: در مثال قبل، بازه‌ی هاشورخورده با استفاده از روش حل تقریبی بدست می‌آید.

نکته: ممکن است که روش ابتکاری تمام xها را به عنوان جواب بدهد، یا مجموعه‌ای از xها را بدهد که بهینه‌ی سراسری در آن نباشد.

تقسیم‌بندی ابتکاری
- ۱- ابتکاری (Heuristic): مشکلات این روش
  - ۱- کاملاً وابسته به مسأله هستند.
  - ۲- عمدتاً در بهینه‌ی محلی متوقف می‌شوند.
- ۲- فراابتکاری (Meta-Heuristic): ویژگی‌ها
  - ۱- مستقل از مسأله هستند.
  - ۲- در بهینه‌ی محلی متوقف نمی‌شوند.

نکته: روش ابتکاری هر چند سریع عمل می‌کند و یک مجموعه جواب هم می‌دهد، اما الزاماً بهترین جواب را نمی‌دهد.

نکته: الگویتم حریصانه (Greedy) یک الگوریتم ابتکاری است.

مثال: یک سری سکه‌های ۱۰، ۸، ۵ و ۱ تومانی داریم. می‌خواهیم با حداقل تعداد سکه‌ها، مقدار ۱۶ تومان را بسازیم. این کار با استفاده از الگوریتم حریصانه چگونه ممکن است؟

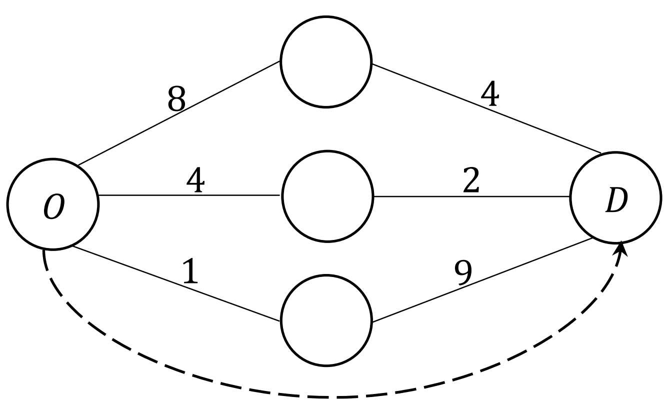
جواب: الگوریتم حریصانه ابتدا ارزش بیشتر را در میان سکه‌ها در نظر می‌گیرد و به ترتیب ارزش سکه‌ها آن‌ها را انتخاب می‌کند. بنابراین داریم:

$$16-(1\times 10)=6 \quad , \quad 6-(1\times 5)=1 \quad , \quad 1-(1\times 1)=0$$

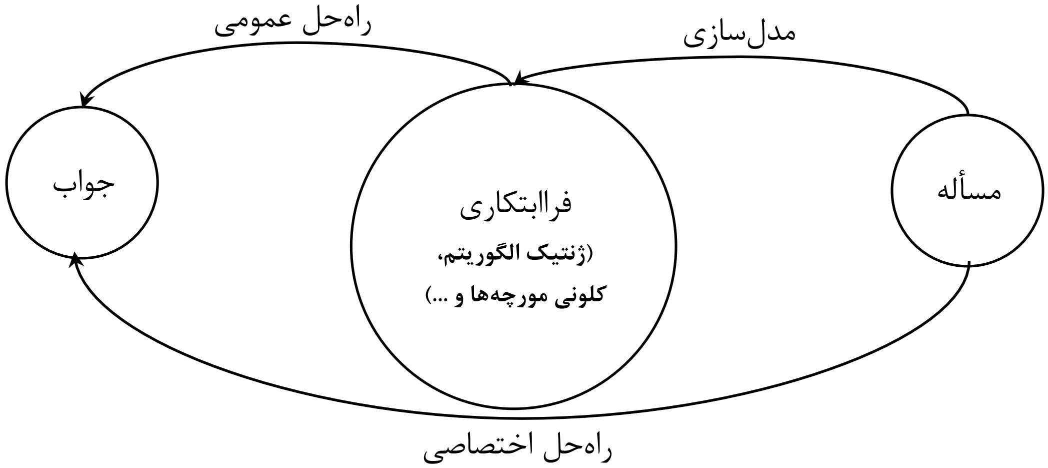
و سکه‌ها به صورت (۱۰،۵،۱) انتخاب می‌شوند.

مثال: با استفاده از روش ابتکاری و الگوریتم حریصانه می‌خواهیم کوتاه‌ترین مسیر را در شکل زیر برای رفتن از O به D انتخاب کنیم.

جواب: مسیر را با توجه به کمترین یال که ۱ می‌باشد، انتخاب می‌کنیم و سپس یال کمترِ بعدی که در اینجا ۹ می‌باشد، انتخاب می‌کنیم و به همین ترتیب پیش می‌رویم (در صورتی که مسیر وسطی؛ یعنی (۴،۲) کوتاه‌ترین مسیر است).



نکته: به جای این‌که مسأله را با یک راه‌حل اختصاصی حل کنند، آن را به صورت فراابتکاری مدل‌سازی می‌کنند و بعد با استفاده از راه‌حل‌های عمومی، جواب را بدست می‌آورند.



فراابتکاری
۱- مبتنی بر یک جواب: در نهایت، یک جواب خوب داریم.
۲- مبتنی بر جمعیتی از جواب‌ها: تعدادی جواب داریم که این جواب‌ها را با هم ترکیب می‌کنیم و دوباره یک جمعیت جواب بدست می‌آید. در هر مرحله، جمعیت جواب‌ها برای رسیدن به جواب بهینه تغییر پیدا می‌کند. در انتها به مجموعه‌ای از جواب‌های خوب می‌رسیم. (ژنتیک الگوریتم)

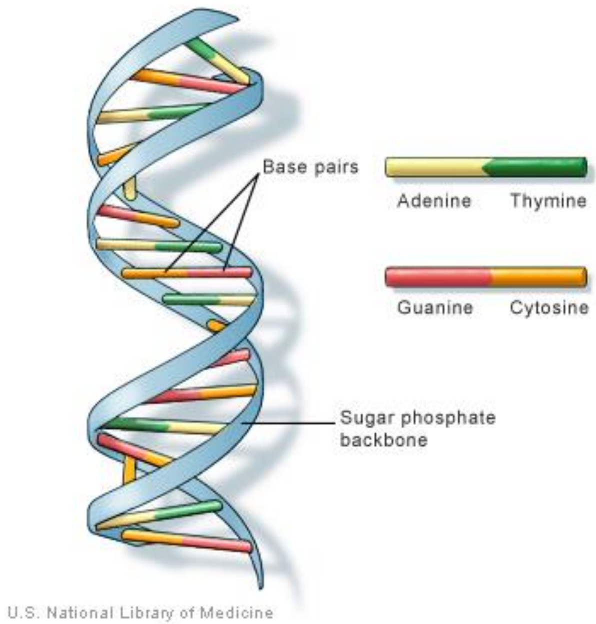
فراابتکاری
از طبیعت الهام گرفته‌اند. مانند ژنتیک الگوریتم که بر پایه‌ی جمعیت جواب می‌باشد.
از طبیعت الهام نگرفته‌اند.

الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک (ژنتیک الگوریتم) برای بهینه‌سازی و با استفاده از روش فراابتکاری مورد استفاده قرار می‌گیرد که مبنی بر جمعیتی از جواب‌ها و الهام گرفته از طبیعت است.

الگوریتم‌های ژنتیک که نمونه‌ی اولیه‌ی آن توسط «هولند» در سال ۱۹۷۵ ارائه شد، تکامل طبیعی را در سطح ژن و کروموزوم شبیه‌سازی می‌کند. عملکرد غالب در تولید نسل جدید، پیوند کروموزوم‌هاست، گرچه جهش در ژن‌ها نیز به عنوان یک عملکرد ثانوی به کار می‌رود.

انسان ۴۶ عدد کروموزوم دارد. کروموزوم رشته‌ای طولانی از DNAهاست. ۹۸٪ سطح یک کروموزوم انسان خالی است و ۲٪ آن ۳۰,۰۰۰ ژن را در بر می‌گیرد.



$$\begin{array}{c} \ldots TG \,\vdots\, GCCA \,\vdots\, T \ldots \\ \ldots AC \,\vdots\, CGGT \,\vdots\, A \ldots \end{array}$$

معرف ژن

پدر (۴۶ کروموزوم) ← ۲۳ کروموزوم به فرزند می‌دهد

فرزند ۲۳ کروموزوم از پدر و ۲۳ کروموزوم از مادر می‌گیرد

مادر (۴۶ کروموزوم) ← ۲۳ کروموزوم به فرزند می‌دهد

بازترکیب (ReCombination یا Crossover): عمل بازترکیب با استفاده از دو رشته‌ی والد، دو رشته‌ی فرزند را به وجود می‌آورد.

جهش (Mutation): در عمل جهش، یک یا چند ژن به صورت تصادفی عوض شده و موجب به وجودآمدن جواب جدید می‌شوند.

دلیل بوجودآمدن سرطان، جهش‌های ناگهانی ژن است. با استفاده از عمل جهش در الگوریتم‌های ژنتیک، می‌توان جواب‌های ضعیف را از بین برد و جواب جدید بدست آورد تا به بهترین جواب برسیم.

نکته: نظریه‌ی تکامل (نظریه‌ی فراگشت) داروین، اثبات نشده است.

کُلّیَت الگوریتم ژنتیک

۱- جمعیت اولیه‌ای از جواب‌های ممکن ایجاد می‌کنیم.
۲- مقدار برازندگی هر جواب را محاسبه می‌کنیم. (تابع برازندگی یا تابع تناسب یا تابعFitness)
۳- جمعیت جدیدی را بر اساس مقدار برازندگی جایگزین جمعیت قبلی می‌کنیم.
۴- در نهایت به جواب بهینه می‌رسیم (شرط خاتمه)، در غیر این‌صورت روند را از مرحله‌ی ۲ تکرار می‌کنیم.

نکته: هر چه تابع برازندگی بیشتر باشد، بهتر است و بر اساس مسأله، رابطه‌ی بین تابع هدف و تابع برازندگی انتخاب می‌شود.

مثال: یک سری سکه‌های ۱۰، ۸، ۵ و ۱ تومانی داریم. می‌خواهیم با حداقل تعداد سکه‌ها، مقدار ۲۰ تومان را بسازیم. تابع برازندگی را مشخص کنید.

جواب: اگر x_i تعداد سکه‌های iام باشد، داریم:

$$\begin{cases} \min(F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & (\text{تابع هدف}) \\ 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 20 & (\text{محدودیت}) \end{cases}$$

$$(x_1 \quad , \quad x_2 \quad , \quad x_3 \quad , \quad x_4)$$

$$S_1 : (2 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0) \Rightarrow f(S_1) = \frac{1}{F} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 : (0 \quad , \quad 2 \quad , \quad 0 \quad , \quad 4) \Rightarrow f(S_2) = \frac{1}{F} = \frac{1}{6}$$

$$S_3 : (1 \quad , \quad 0 \quad , \quad 2 \quad , \quad 0) \Rightarrow f(S_3) = \frac{1}{F} = \frac{1}{3}$$

$$S_4 : (0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 3 \quad , \quad 5) \Rightarrow f(S_4) = \frac{1}{F} = \frac{1}{8}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(S_1) = \frac{1}{2}$ بیشترین مقدار تابع برازندگی و کمترین مقدار سکه‌ها را دارد (دو سکه‌ی ۱۰ تومانی) و جواب مسأله است.

Phenotype Space
(فضای مشخصه‌های فیزیکی یک موجود زنده)
(حوزه‌ی مسأله)

$\longrightarrow$

Genotype Space
(فضای طبیعت ژنتیکی یک نوع موجود زنده)
(حوزه‌ی کروموزوم)

مثال: فرض کنید تابع هدف $f(x) = x^2 - 3x + 6$ را داریم. می‌خواهیم برای $0 \le x \le 15$ و $x \in \mathbb{N}$ مینیمم تابع را بیابیم. با استفاده از الگوریتم ژنتیک مدل‌سازی کنید.

$$\begin{cases} \min[F = x^2 - 3x + 6] \\ 0 \le x \le 15 \quad , \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

جواب: می‌خواهیم کروموزومی بسازیم که جواب مسأله باشد. بر اساس محدودیت‌های x ، کروموزوم را می‌نویسیم.

مرحله‌ی ۱: کُدکردن (Encoding): برای این‌که ما جواب‌های ممکن ($0 \le x \le 15$) را کدگذاری کنیم، یکی از روش‌هایی که در پیش داریم، تبدیل هر عدد به یک عدد باینری متناظر است. چون بیشترین جواب ممکن ما عدد ۱۵ است و متناظر باینری آن، ۱۱۱۱ چهاربیتی است، لذا تمام جواب‌های ما (کروموزوم‌ها) دارای طولی برابر $l = 4$ می‌باشد. تعدادی عدد طبیعی تصادفی در بازه‌ی $[0,15]$ در نظر می‌گیریم و کروموزوم آن‌ها را می‌نویسیم تا جمعیت اولیه تشکیل شود.

$if\ \ x = 4 \Rightarrow C_1 = 0100$ کروموزومی با یک ژن

$if\ \ x = 1 \Rightarrow C_2 = 0001$ کروموزومی با یک ژن

$if\ \ x = 14 \Rightarrow C_3 = 1110$ کروموزومی با یک ژن

نکته: هر ژن، معادل یک متغیر هست.

مرحله‌ی ۲: اعمال تابع برازندگی (تابع تناسب یا تابع Fitness): تابع Fitness معیاری برای رتبه‌بندی کروموزوم‌هاست که کمک می‌کند تا کروموزوم‌های برتر برای نسل بعدی جمعیت انتخاب شوند. نحوه‌ی انتخاب این تابع، بسته به کاربر موردنظر دارد.

در این‌جا چون به دنبال مینیمم‌کردن تابع هدف هستیم؛ لذا هرچه تابع هدف کمتر باشد، بهتر است و باید تابع برازندگی بیشتر شود، لذا داریم:

$$\text{تابع برازندگی} = \frac{1}{\text{تابع هدف}} \quad \text{یا} \quad f(C) = \frac{1}{F}$$

$$f(C_1) = \frac{1}{10}$$

$$f(C_2) = \frac{1}{4}$$ بهترین جواب در این نسل

$$f(C_3) = \frac{1}{160}$$

مرحله‌ی ۳: بازترکیب (ReCombination)

$$x = 4 \Rightarrow C_1 = \underline{\underline{01}}\,\underline{00} \quad , \quad x = 1 \Rightarrow C_2 = \underline{00}\,\underline{\underline{01}}$$

$$C'_1 = 0101 \Rightarrow x = 5 \quad , \quad C'_2 = 0000 \Rightarrow x = 0$$

مرحله‌ی ۴: جهش (Mutation)

$$x = 14 \Rightarrow C_3 = 1110$$

$$C'_3 = 0110 \Rightarrow x = 6$$

نکته: عمل جهش، الزاماً بر روی یک بیت نیست و می‌تواند در چند بیت نیز اتفاق بیفتد.

حال کروموزوم‌های متولدشده جزء نسل جدید به حساب می‌آیند و به جمعیت اولیه افزوده می‌شوند. اکنون تابع برازندگی را برای C'_1 ، C'_2 و C'_3 بدست می‌آوریم.

$$C'_1 = 0101 \Rightarrow x = 5 \quad \Longrightarrow \quad f(C'_1) = \frac{1}{16}$$

$C'_2 = 0000 \Rightarrow x = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(C'_2) = \frac{1}{6}$ بهترین جواب در این نسل

$C'_3 = 0110 \Rightarrow x = 6 \quad \Longrightarrow \quad f(C'_3) = \frac{1}{24}$

برای تکرار الگوریتم، جواب‌هایِ با Fitness پایین حذف می‌شوند و الگوریتم دوباره با n فرد به کار خود ادامه می‌دهد.

معیارهای مختلفی را می‌توان برای توقف الگوریتم در نظر گرفت. یک معیار می‌تواند این باشد که بهترین جواب بعد از اجرای تعداد مشخصی بار از الگوریتم تغییر نکند.

نکته: ممکن است بهترین جواب طی مراحل بعد به نحوی از بین برود. برای جلوگیری از این امر بعد از هر بار انجام الگوریتم، بهترین جواب را در جایی کنار می‌گذاریم (far) تا همیشه بهترین جواب حاصل از هر بار اجرای الگوریتم را داشته باشیم.

مثال: فرض کنید تابع هدف $f(x) = x^2 + xy + 4y$ را با محدودیت‌های $x \leq 7$ ، $y \leq 3$ و $x, y \in \mathbb{N}$ داریم. دو نمونه کروموزوم آن را بنویسید.

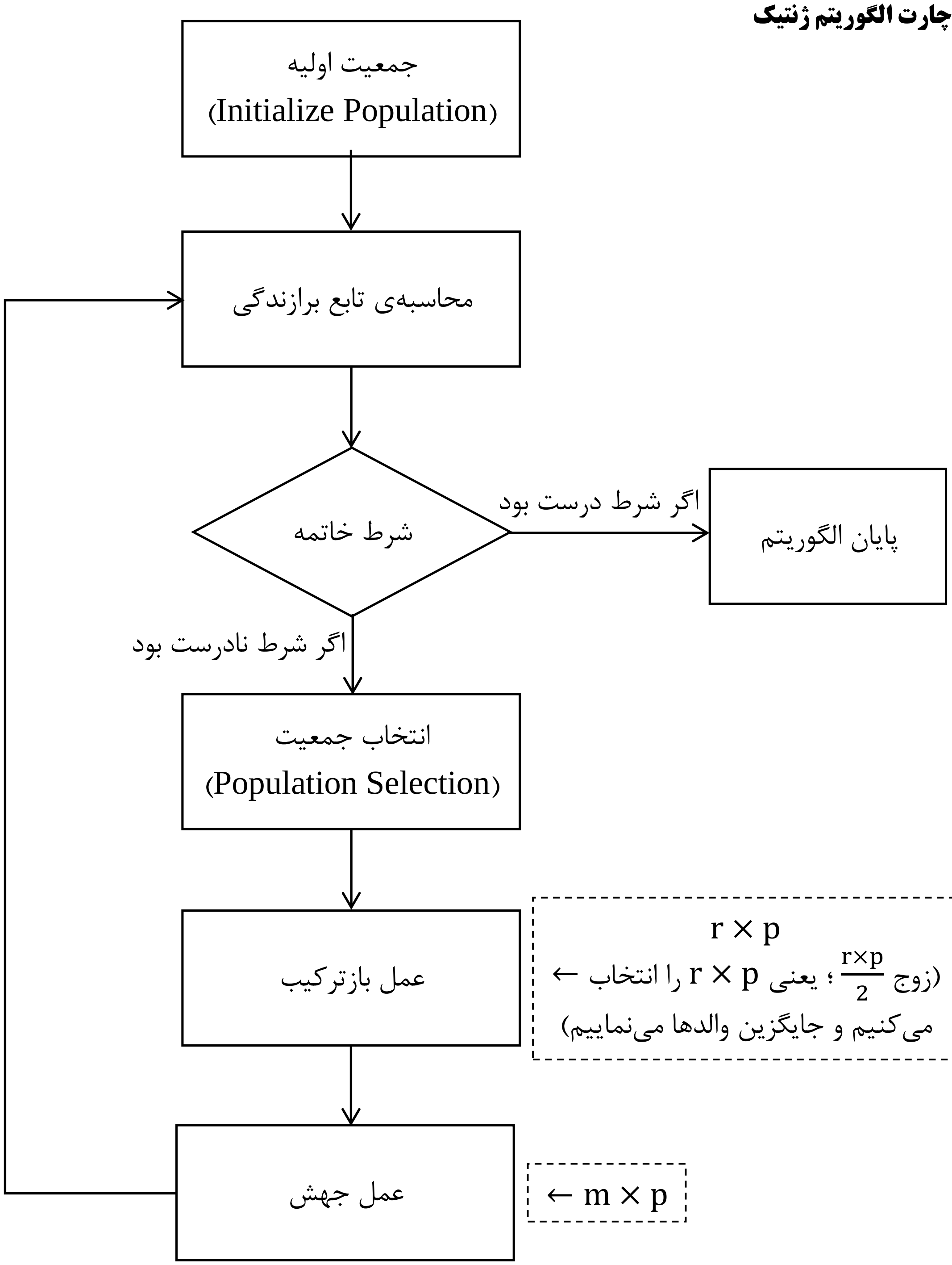
$$\begin{cases} \min[x^2 + xy + 4y] \\ x \leq 15 \ , \ y \leq 3 \ , \ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} if\ x = 4 \to x = (100)_2 \\ \qquad\qquad\qquad \Longrightarrow C_1 = 100\,01 \\ if\ y = 1 \to y = (01)_2 \end{cases}$$ کروموزومی با دو ژن

$$\begin{cases} if\ x = 5 \to x = (101)_2 \\ \qquad\qquad\qquad \Longrightarrow C_2 = 101\,10 \\ if\ y = 2 \to y = (10)_2 \end{cases}$$ کروموزومی با دو ژن

نکته: x و y را می‌توان به هر صورتی با هم ترکیب کرد. مثلاً می‌توان به جای این‌که اول x و بعد y را بنویسیم، اول y و بعد x را بنویسیم.

فلوچارت الگوریتم ژنتیک



p : جمعیت

r : نرخ بازترکیب (درصدی از جمعیت که در هر مرحله توسط الگوریتم Crossover جایگزین می‌شوند). r به صورت دلخواه مقدار می‌گیرد و معمولاً ۰/۶ یا ۰/۵ (۶۰٪ یا ۵۰٪) در نظر گرفته می‌شود.

m : نرخ جهش (درصدی از جمعیت که در هر مرحله توسط الگوریتم Mutation جایگزین می‌شوند). m به صورت دلخواه مقدار می‌گیرد و معمولاً ۰/۰۱ یا ۰/۰۲ در نظر گرفته می‌شود. اگر نرخ جهش زیاد باشد، واگرایی ایجاد می‌شود.

شرط خاتمه
- تغییر محسوسی در بهترین برازندگی، در نسل‌های مختلف نداشته باشیم.
- واریانس برازندگی یک نسل، به یک حدّ آستانه‌ای (Fitness_threshold) برسد.
- تعداد مشخصی نسل تولید شود.

روش انتخاب رولت (Roulette)

روش‌های مختلفی برای الگوریتم‌های ژنتیک وجود دارند که می‌توان برای انتخاب ژنوم‌ها از آن‌ها استفاده کرد. یکی از این روش‌های انتخاب، روش رولت است. در این روش، عنصری که عدد برازش (تناسب) بیشتری داشته باشد، انتخاب می‌شود. در واقع، به نسبت عدد برازش برای هر عنصر یک احتمال تجمعی نسبت می‌دهیم و با این احتمال است که شانس انتخاب هر عنصر تعیین می‌شود.

$$\left(\text{تابع احتمال}\right) P(C_i) = \frac{fitness(C_i)}{\sum_j fitness(C_j)}$$

مثال: برای مثال الگوریتم ژنتیک که حل کردیم، داریم:

$$P(C_1) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{160}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{16+40+1}{160}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{57}{160}} = 0.28 \text{ یا } \%28$$

$$P(C_2) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{160}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{16+40+1}{160}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{57}{160}} = 0.7 \text{ یا } \%70$$

$$P(C_3) = \frac{\frac{1}{160}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{160}} = \frac{\frac{1}{160}}{\frac{16+40+1}{160}} = \frac{\frac{1}{160}}{\frac{57}{160}} = 0.02 \text{ یا } \%2$$

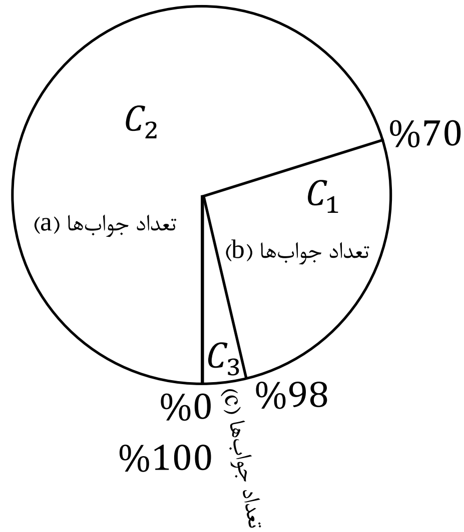
$$P(C_2) > P(C_1) > P(C_3)$$

انتخاب کروموزوم‌ها

روش انتخاب چرخشی رولت (Roulette Wheel Selection)

در روش رولت، احتمال انتخاب یک کروموزوم برای استفاده در جمعیت بعدی، بستگی به نسبت fitness آن به fitness بقیه‌ی اعضا دارد. این روش Roulette Wheel selection نامیده می‌شود.

مثال: برای مثال قبلی داریم:



در روش رولت که مبتنی بر احتمال است، از همه‌ی جواب‌ها با درصدهای خاصی استفاده می‌شود. بنابراین در این روش، احتمال انتخاب افزایش می‌یابد.

خوب	تعداد جواب‌ها (a)	٪۷۰
متوسط	تعداد جواب‌ها (b)	٪۲۸
بد	تعداد جواب‌ها (c)	٪۲

احتمال: ٪۰ – ٪۷۰ – ٪۹۸ – ٪۱۰۰

مثال: در برنامه‌نویسی داشتیم که مثلاً حاصل سری زیر را با دقت ۰/۰۱ حساب کنید.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$$

اگر بخواهیم این سری را با الگوریتم ژنتیک حل کنیم، می‌بایست $S_2 - S_1 < 0.01$ را در نظر بگیریم.

نکته: بجز ارقام باینری ۰ و ۱ می‌توان از ارقام دیگر و حتی حروف هم استفاده نمود.

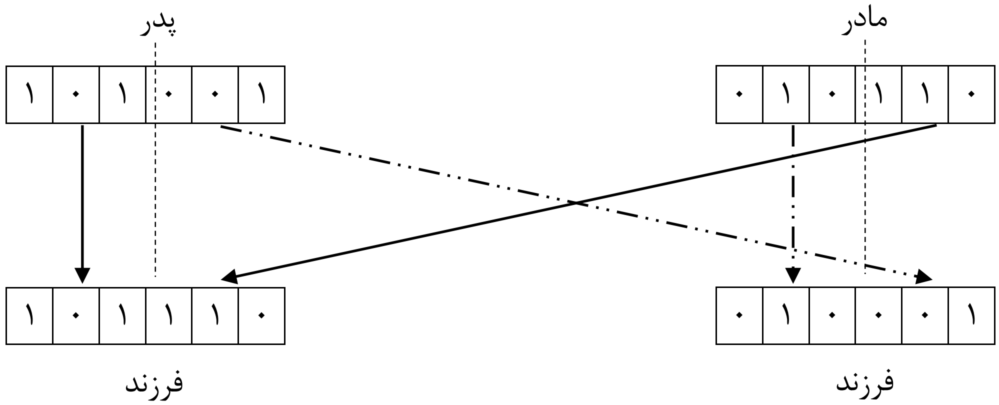
نکته: مبحث پردازش‌های موازی در الگویتم ژنتیک مطرح است.

نکته: مبحث مهاجرت فیزیکی از روش‌های بهبود می‌باشد.

روش‌های بازترکیب

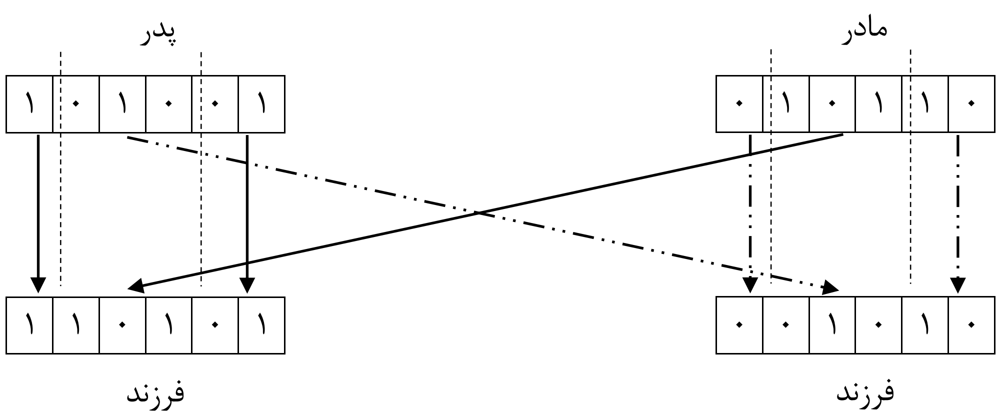
۱- Single-point Crossover

- ✓ یک نقطه‌ی تصادفی در طول رشته انتخاب می‌شود.
- ✓ والدین در این نقطه به دو قسمت تقسیم می‌شوند.
- ✓ هر فرزند با انتخاب تکه‌ی اول از یکی از والدین و تکه‌ی دوم از والد دیگر بوجود می‌آید.



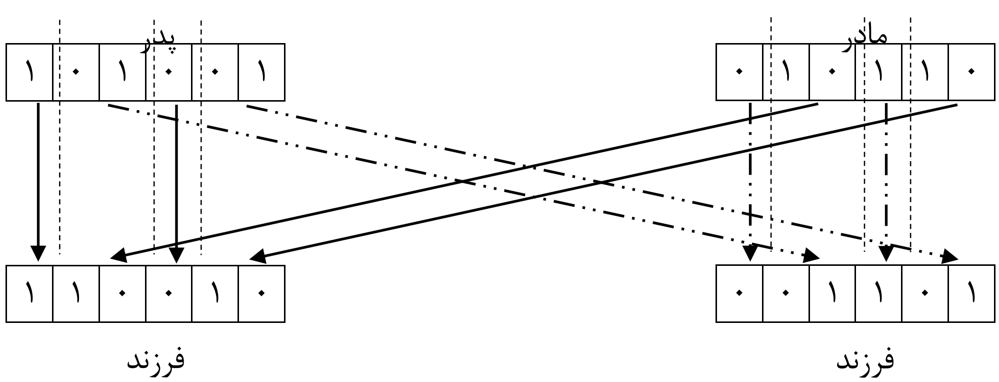
۲- Double-point Crossover

- ✓ دو نقطه‌ی تصادفی در طول رشته انتخاب می‌شود.
- ✓ والدین در این دو نقطه به سه قسمت تقسیم می‌شوند.
- ✓ هر فرزند با انتخاب تکه‌ی اول و سوم از یکی از والدین و تکه‌ی دوم از والد دیگر بوجود می‌آید.



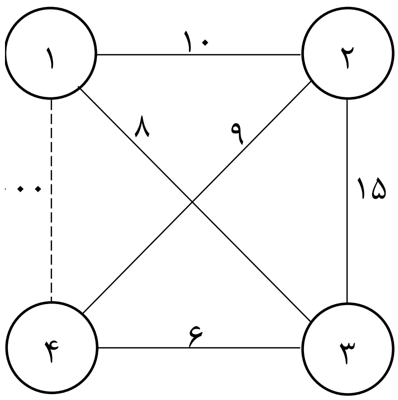
۳- Uniform Crossover

- ✓ چند نقطه‌ی تصادفی در طول رشته انتخاب می‌شود.
- ✓ والدین در این نقاط به چند قسمت تقسیم می‌شوند.
- ✓ هر فرزند با انتخاب بیت‌ها به صورت یکنواخت و به ترتیب از والدین انتخاب می‌شوند.



مثال: مسألەی فروشندەی دورەگرد (TSP) برای شکل زیر با استفاده از الگوریتم ژنتیک.

جواب: چون مسأله از نوع مینیم‌سازی است، پس تابع برازندگی را معکوس تابع هدف می‌گیریم.



$$S_1 : (1\,,2\,,3\,,4) \Rightarrow f(S_1) = \frac{1}{F} = \frac{1}{10+15+6} = \frac{1}{31}$$

$$S_2 : (4\,,3\,,2\,,1) \Rightarrow f(S_2) = \frac{1}{F} = \frac{1}{6+15+10} = \frac{1}{31}$$

$$S_3 : (4\,,3\,,1\,,2) \Rightarrow f(S_3) = \frac{1}{F} = \frac{1}{6+8+10} = \frac{1}{24}$$

$S_4 : (4\,,1\,,2\,,3)$ (این امکان وجود ندارد) $\Longrightarrow$ (مقدار یال 4 به 1 را 1000 قرار می‌دهیم) $\Rightarrow f(S_4) = \frac{1}{1025}$

نکته: دو راه‌حل برای همچنین کروموزوم‌هایی وجود دارد:

۱- از اول بررسی کنیم که این کروموزوم‌ها وارد جمعیت نشوند.

۲- مقدار برازندگی را مقدارِ خیلی بالایی قرار دهیم که به صورت خودکار در انتخاب نسل‌ها حذف شود.

$S_1 : (1\,,2\,,3\,,4) \quad , \quad S_2 : (4\,,3\,,2\,,1)$

$(1\,,2\,,2\,,1) \quad , \quad (4\,,3\,,3\,,4)$

$S_3 : (4\,,3\,,1\,,2)$

جهش غلط

$(4\,,3\,,1\,,1)$

جهش غلط

$(4\,,3\,,3\,,1)$

نکته: جواب‌های بالا در Genotype معنا دارند، اما در Phenotype معنا ندارند و غلط هســتند؛ چون از هر گره فقط یک‌بار می‌توانیم عبور کنیم و تکرار معنا ندارد.

$$S_3 : (4\,,3\,,2\,,1)$$

$$\Big\downarrow \text{ جهش درست}$$

$$(4\,,2\,,3\,,1)$$

$$\Big\downarrow \text{ جهش درست}$$

$$(4\,,2\,,1\,,3)$$

$$S_3 : (4\,,3\,,1\,,2) \quad , \quad S_4 : (4\,,1\,,2\,,3)$$

$$(4\,,3\,,2\,,3) \quad , \quad (4\,,1\,,1\,,2)$$

$$\Big\downarrow \text{ جهش} \qquad\qquad \Big\downarrow \text{ جهش}$$

$$(4\,,3\,,2\,,1) \quad , \quad (4\,,3\,,1\,,2)$$

برخی مزایای الگوریتم ژنتیک

به طور خلاصه، برخی مزایای الگوریتم ژنتیک را می‌توان در موارد زیر برشمرد:

۱- هم با متغیرهای پیوسته و هم گسسته، می‌تواند عمل بهینه‌سازی را انجام دهد.

۲- نیازی به محاسبه‌ی مشتق توابع ندارد.

۳- قادر به بهینه‌سازی مسائل با تعداد متغیرهای زیاد می‌باشد.

۴- قابل اجرا از طریق کامپیوترهای موازی (پردازش‌های موازی) است.

۵- قادر است تا چند جواب بهینه را به طور همزمان بدست آورد نه فقط یک جواب را.

۶- الگوریتم‌های ژنتیک بر روی مجموعه‌ای از راه‌حل‌ها اعمال می‌شوند و نه بر روی یک راه‌حل خاص.

۷- قادر است تا متغیرها را کُدبندی نموده و بهینه‌سازی را با متغیرهای کُدبندی‌شده انجام دهد. کُدبندی سرعت همگرایی الگوریتم را افزایش می‌دهد.

۸- الگوریتم توانایی کارکردن با داده‌های عددی تولیدشده و داده‌های تجربی را علاوه بر توابع تحلیلی دارد.

۹- این الگوریتم بیشتر در مسائل بهینه‌سازی و امثالهم به کار می‌رود.

«وَالسَّلامُ عَلی مَنِ اتَّبِعَ الْهُدی»

«در پناه خدا، موفق و مؤید باشید»