مخازن تحت فشار

Year. Month. Data. Subject

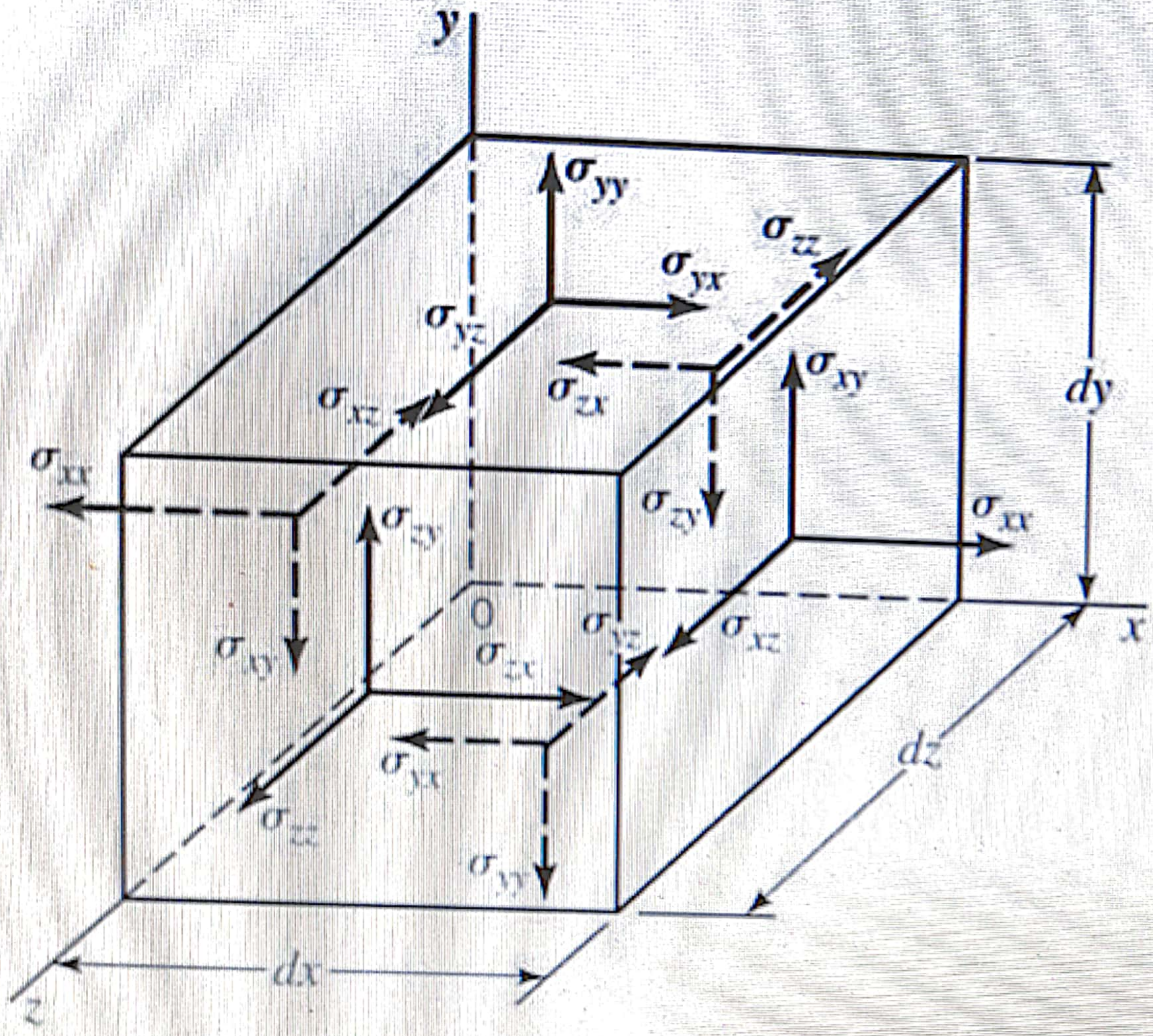
مقدمه‌ای بر الاستیسیته: از آن جایی که روابط حاکم بر تنش ها و کرنش های مربوط به مخازن تحت فشار به بخش های از الاستیسیته وابستگی کامل لذا ابتدائاً این روابط بدون اینکه وارد جزئیات اثبات آن ها شویم توضیح داده می شوند.

ابتدائاً یادآوری می گردد که تنش در یک نقطه دارای مقدار مشخصی نیست و به صورت یک تنسور مرتبه دوم نمایش داده می شود منظور از مرتبه دوم آن است که برای آنکه آن را تشخیص دهیم نیاز به ۲ اندیس داریم که در مختصات های مرسوم سه بعدی (کارتزین، استوانه ای، کره ای) اندیس اول جهت صفحه ای که تنش بر آن وارد می شود و اندیس دوم جهت تنش را نشان می دهد به طور کلی وضعیت تنش در یک نقطه در مختصات کارتزین به صورت زیر نمایش داده می شود:

شکل ۱ ← اسکریپت آن در سیستم.

شکل در صفحه بعد آورده شده

MENHAJ



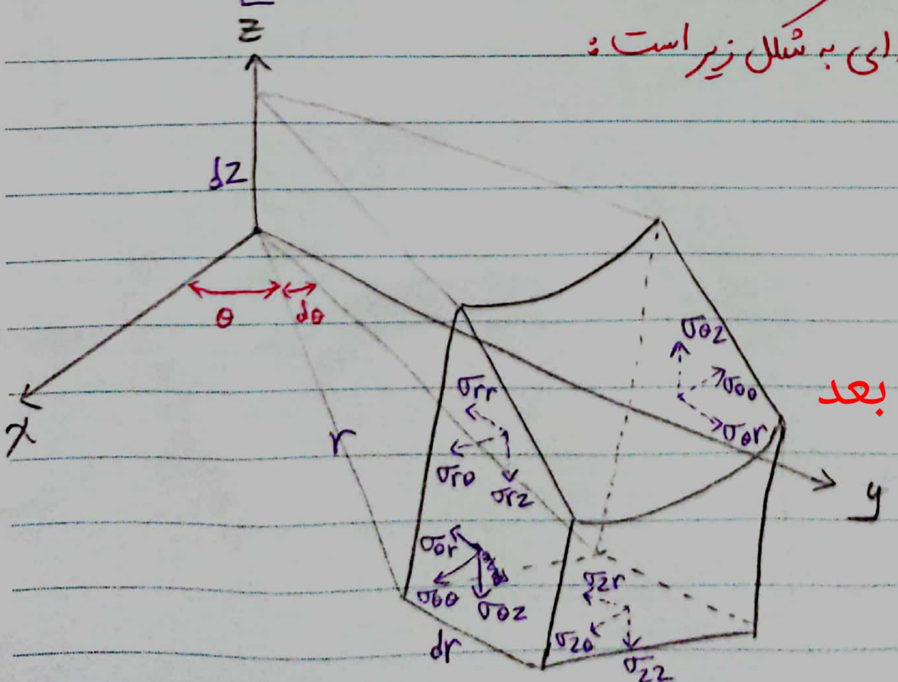
y
σyy
σzz
σyx
σyz
σzx
σxy
σxz
dy
σxx
σzy
σxx
O
σyz
σxz
x
σxy
σzx
σyx
dz
σzz
σyy
dx
z

یک المان تنش دارای وزن است از آن جایی که این وزن ها بر واحد حجم تعریف می شود بنابراین برای اینکه تبدیل به نیرو شوند باید در حجم مربوطه ضرب شوند اگر مولفه های حجم بر واحد وزن بر حسب های B_x ، B_y ، B_z نشان داده شده باشد برای تبدیل این مولفه ها به نیرو باید dx ، dy و dz ضرب شوند. و با توجه به اینکه مولفه های تنش وارد بر سطوح المان نیرو در آن راستا ارائه دهد و با توجه به اینکه یک مولفه ضربی در این حالت کمتر است. لذا می توان از وزن المان در مقابل مقدار تنش ها صرف نظر کرد

شکل ریاضیاتی نمایش به صورت یک تنسور مرتبه 2 می باشد و آن را می توان به صورت یک ماتریس 3x3 نشان داد

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

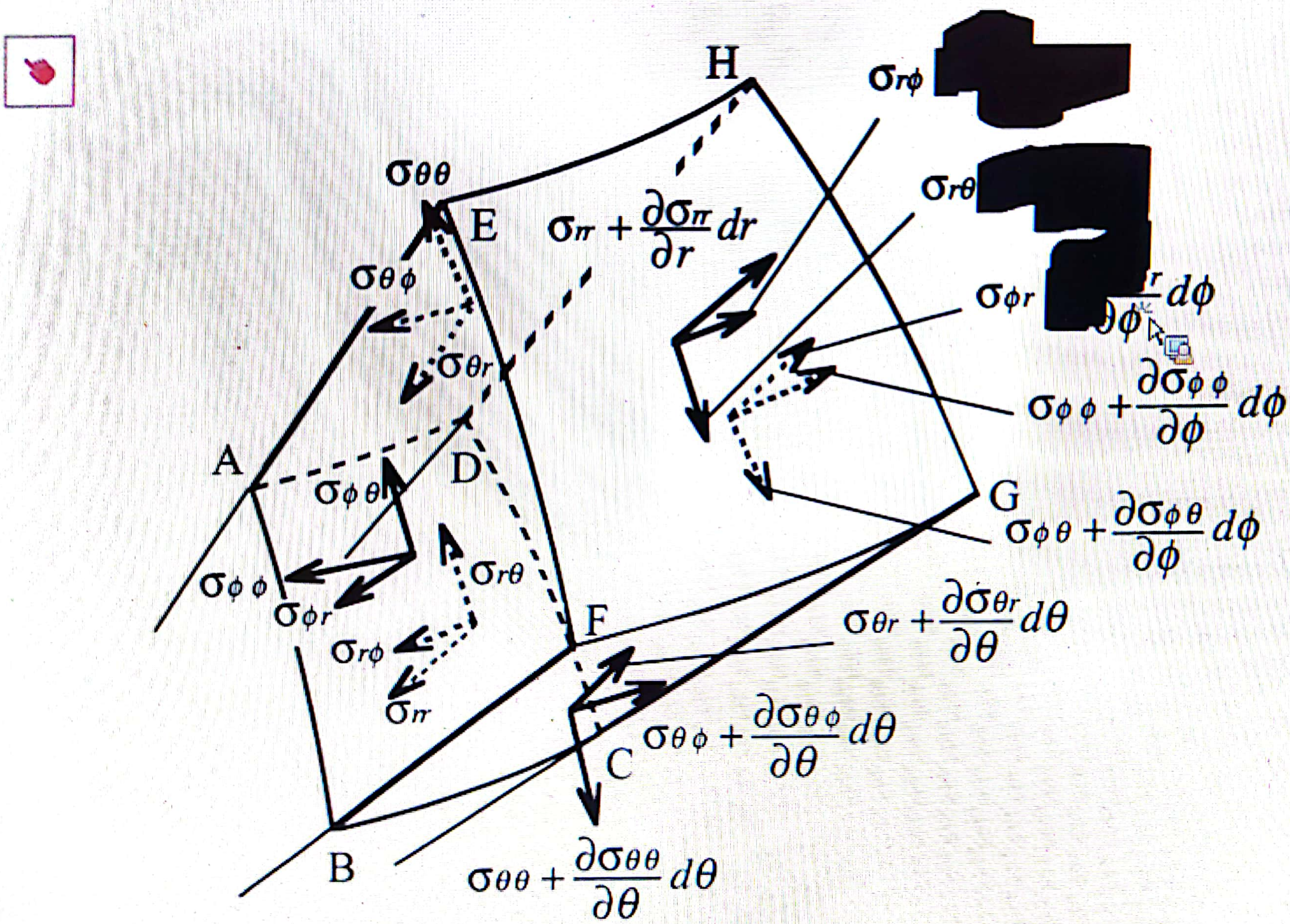
المان تنش در مختصات استوانه ای به شکل زیر است:



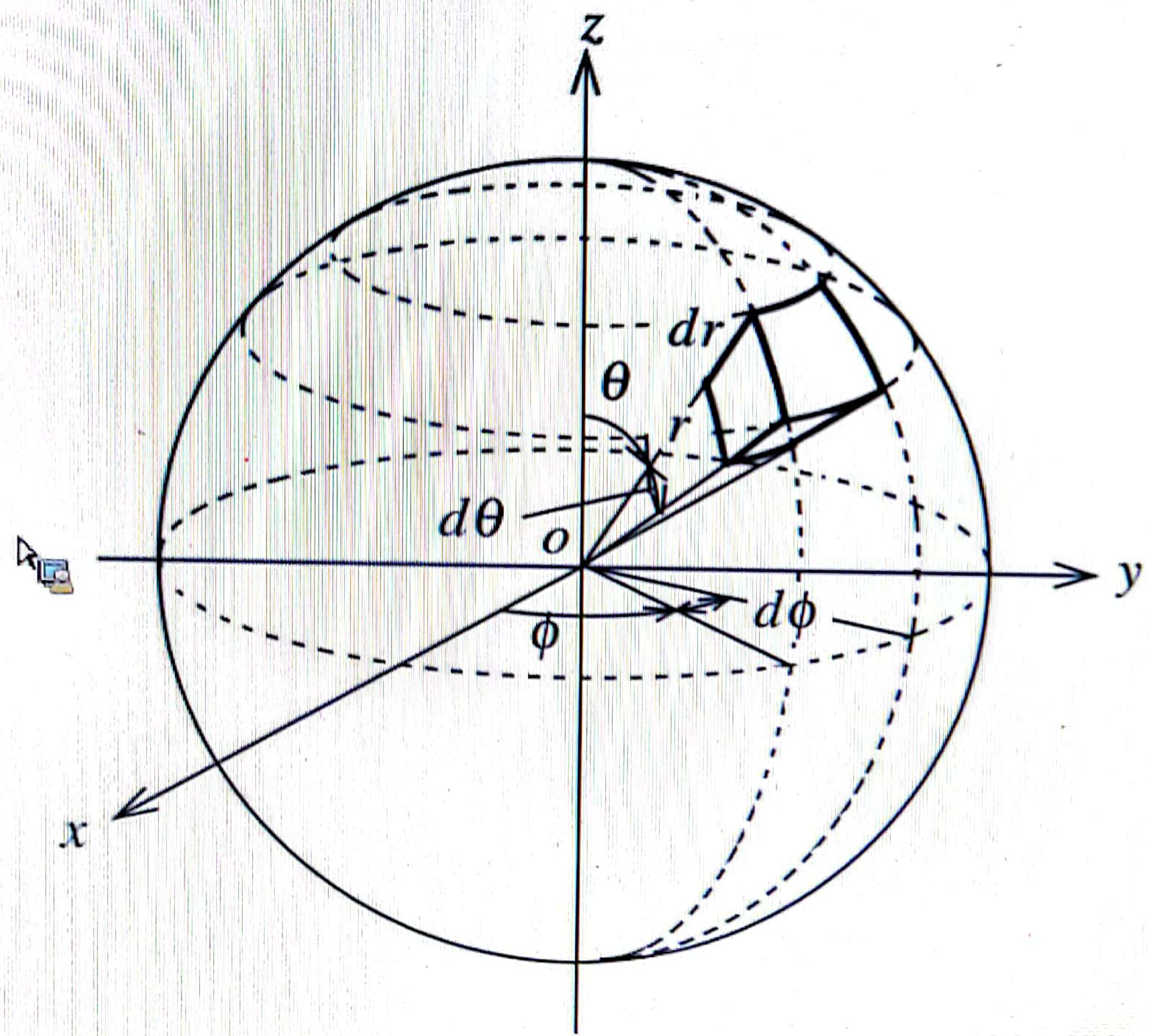
شکل ۲

استرس در سیستم

شکل کامل در صفحه بعد



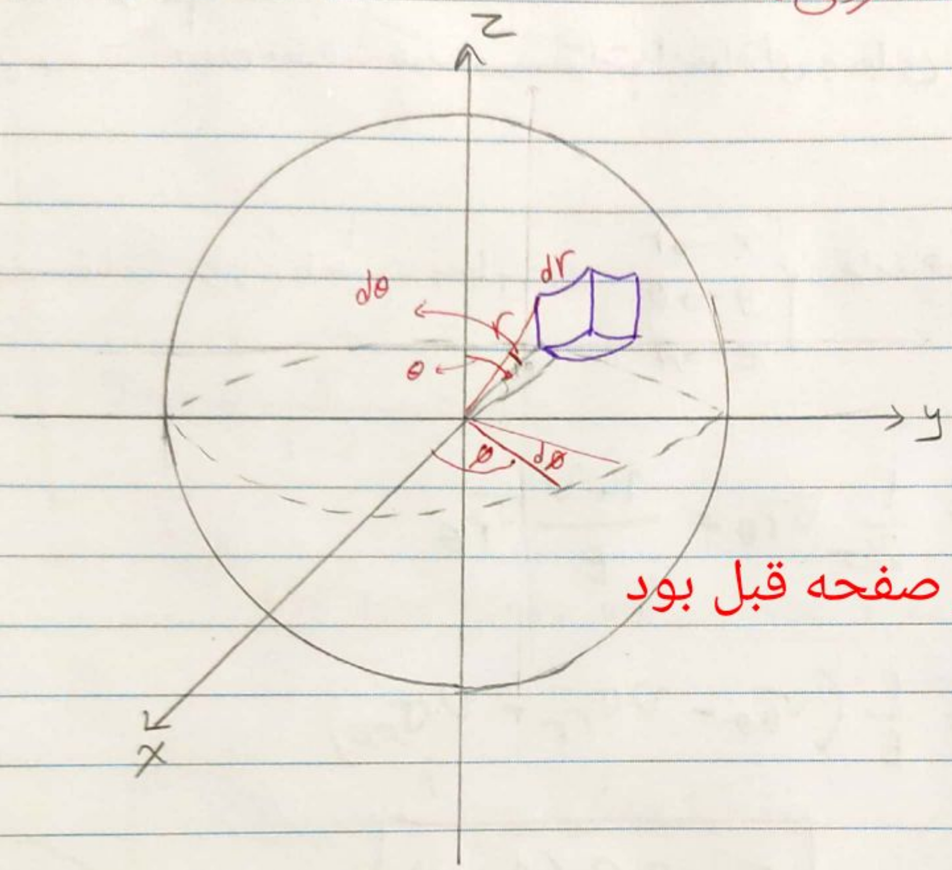
H
$\sigma_{r\phi}$ [redacted]
$\sigma_{\theta\theta}$
E
$\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr$
$\sigma_{r\theta}$ [redacted]
$\sigma_{\theta\phi}$
$\sigma_{\phi r}$ [redacted] $d\phi$
$\sigma_{\theta r}$
$\sigma_{\phi\phi} + \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} d\phi$
A
D
$\sigma_{\phi\theta}$
G
$\sigma_{\phi\theta} + \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \phi} d\phi$
$\sigma_{r\theta}$
$\sigma_{\phi\phi}$
$\sigma_{\phi r}$
F
$\sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta$
$\sigma_{r\phi}$
σ_{rr}
$\sigma_{\theta\phi} + \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta} d\theta$
C
B
$\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta$



المان تنش در مختصات کروی

المان تنش در مختصات کروی:

رجوع شود به شکل ۳ و ۴ اسکن



شکل صحیح در صفحه قبل بود

برای هر نقطه از یک جسم تحت بارگذاری می‌توان 15 معادله نوشت . 6 تا از این معادلات همان قانون هوک می‌باشد:

در مختصات کارتزین

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}\right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G}\sigma_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\sigma_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz}$$

سه معادله دوم و سوم به معادلات

برای بدست آوردن معادلات هوک در مختصات استوانه ای به جای
$$\begin{cases} x \to r \\ y \to \theta \\ z \to z \end{cases}$$
قرار دهیم.

در مختصات کروی کافیست به جای
$$\begin{cases} x \to r \\ y \to \theta \\ z \to \phi \end{cases}$$
قرار دهیم.

Exa $\longrightarrow$ $$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G}\sigma_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta}$$

Exa $\longrightarrow$ $$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\phi\phi}\right)$$

نکته:
$$\boxed{E = 2G(1+\nu)}$$

شکل دیگری از قانون هوک که تنش ها را برحسب کرنش ها نمایش می دهد به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\right] \\ \sigma_{yy} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})\right] \\ \sigma_{zz} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\right] \end{cases}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{yz}$$

For the case of Plane stress $\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0$

تنش صفحه‌ای

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}$$

$$A = \frac{1}{1-\nu^2}$$

$$B = \frac{\nu}{1-\nu^2}$$

for the case of Plane strain $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$

کرنش صفحه‌ای

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}\right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy} \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

شکل دیگری از قانون هوک به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda e + 2G\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda e + 2G\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} = \lambda e + 2G\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{cases}$$

$\sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}$ $\qquad$ $\sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}$

λ و G : ثابت Lame لامه

$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$

$$\boxed{\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \qquad \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

Year. Month. Data. Subject

معادلات تعادل المان: دستگاه های مختلف به صورت زیر نوشته می شوند:

مختصات کارتزین:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + B_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z = 0$$

مختصات استوانه ای:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + B_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + B_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + B_z = 0$$

در مختصات کروی:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial \phi}+\frac{1}{r}\left(2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\phi\phi}+\sigma_{\theta r}\cot\theta\right)+B_r=$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \phi}+\frac{1}{r}\left[(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\phi\phi})\cot\theta+3\sigma_{r\theta}\right]+B_\theta=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi}+\frac{1}{r}\left(3\sigma_{r\phi}+2\sigma_{\theta\phi}\cot\theta\right)+B_\phi=0$$

در مختصات قطبی:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+B_r=0$$

مولفه z ندارد

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+2\frac{\sigma_{r\theta}}{r}+B_\theta=0$$

معادلات کرنش جابه‌جایی: این معادلات شامل ۶ معادله است که در دو حالت کوچک و بزرگ نوشته می‌شوند.

جابجایی
کرنش کوچک

معادلات در حالت کرنش ـ جابه‌جایی بزرگ به شکل زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

جابه‌جایی المان در راستای $x \leftarrow u$

〃 〃 〃 $y \leftarrow v$

〃 〃 〃 $z \leftarrow w$

معادلات در حالت کرنش جابجایی کوچک:

از معادلات صفحه قبل توان 2 ها و عبارت های ضربی حذف می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

معادلات بالا در حالت استوانه‌ای:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\gamma_{rz} = 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\gamma_{\theta z} = 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

Year. Month. Data. Subject

در این حالت جابه‌جایی در حالت r با u، v با θ و z با z نشان داده شده است.
طول ← مماسی ←

در مختصات کروی spherical coordinate:

$$\left[\begin{aligned} &\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{u}{r}+\frac{v}{r}\cot\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\gamma_{r\theta}=2\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r} \\ &\gamma_{r\varphi}=2\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r} \\ &\gamma_{\theta\varphi}=2\varepsilon_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-w\cot\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{aligned}\right.$$

در این حالت u و v و w جابه‌جایی در المان تنش در جهت r، θ و φ (به ترتیب) می‌باشد.

در مختصات قطبی: بخش z نداریم.

$$\left[\begin{aligned} &\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\gamma_{r\theta}=2\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r} \end{aligned}\right.$$

Year. Month. Data. Subject

در مختصات استوانه‌ای اگر سازه تحت بررسی از لحاظ ماده، هندسه، بارگذاری

و شرایط مرزی نسبت به محور دستگاه مختصات استوانه‌ای (z) تقارن کامل

داشته باشد آنگاه تمامی تنش های برشی و کرنش های برشی صفر می باشند و همچنین $\frac{\partial}{\partial\theta}=0$

نیز همچنین جابه جایی المان در جهت مماسی (v) صفر می باشد لذا از معادله تعادل المان

در مختصات استوانه‌ای ترم های زیر باقی می ماند:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+B_r=0 \quad (1)$$

$$B_\theta=0 \quad , \quad \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+B_z=0$$

از آن جایی که از مولفه های نیروی وزن در مقایسه با نیرو های وارد بر المان صرف نظر می شود یعنی

از B_r ، B_θ و B_z ، لذا B_r, B_θ و B_z صفر می باشند و از طرفی با توجه به اینکه در حالت

تقارن کامل تنش شعاعی صرفا تابع r می باشد لذا عبارت $\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}$ باید به شکل $\frac{d\sigma_{rr}}{dr}$

نوشته می شود. بنابراین از معادله اول معادله زیر به طور خلاصه بدست می آید:

$$\boxed{\frac{d\sigma_{rr}}{dr}-\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0}$$

در مختصات کروی در تقارن کامل نسبت به مرکز (از لحاظ ماده، هندسه، بارگذاری) نوشته می‌شود

$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$ $\quad \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ یعنی

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{d \sigma_{rr}}{dr} \qquad B_r = B_\theta = B_\phi = 0$$

تنها معادله باقی مانده

$$\boxed{\frac{d \sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) = 0}$$

در مختصات استوانه‌ای در تقارن کامل

u فقط تابع r

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

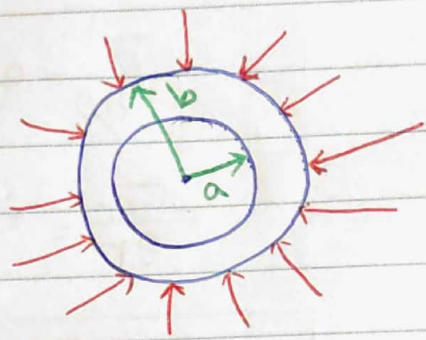
در مختصات قطبی: (تقارن کامل)

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u}{r}$$

Year. Month. Data. Subject

تحلیل الاستیک مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار داخل و خارج



shell دو دسته → thin, thick

$\frac{t}{P_{min}} <$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A\,\varepsilon_{rr} + B\,\varepsilon_{\theta\theta}\right) & (1) \\ \sigma_{\theta\theta} = E\left(B\,\varepsilon_{rr} + A\,\varepsilon_{\theta\theta}\right) & (2) \end{cases}$$

plane stress
$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{1-\nu^2} \\ B = \dfrac{\nu}{1-\nu^2} \end{cases} \quad (3)$$

plane straine
$$\begin{cases} A = \dfrac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \dfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{du}{dr} \\ \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u}{r} \end{cases}$$

$$5, 6 \longrightarrow 1, 2 \qquad \begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A\dfrac{du}{dr} + B\dfrac{u}{r}\right) & 7 \\ \sigma_{\theta\theta} = E\left(B\dfrac{du}{dr} + A\dfrac{u}{r}\right) & 8 \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \qquad 9$$

$$7, 8 \longrightarrow 9 \qquad \frac{dE}{dr}\left(A\frac{du}{dr} + B\frac{u}{r}\right) + E\left(A\frac{d^2u}{dr^2} + B\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right)\right)$$

$$+ \frac{E}{r}\left[(A-B)\frac{du}{dr} + (B-A)\frac{u}{r}\right] = 0$$

$$(EA)\frac{d^2u}{dr^2} + \left[A\frac{dE}{dr} + \cancel{\frac{EB}{r}} + \frac{E}{r}\,\cancel{(A-B)}\right]\frac{du}{dr} + \left[\frac{B}{r}\frac{dE}{dr} - \cancel{\frac{EB}{r^2}}\,\cancel{(B-A)}\right]u = 0 \qquad 10$$

$$\times\frac{1}{EA}: \quad \boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} + \frac{1}{r}\right]\frac{du}{dr} + \left[\frac{1}{r}\,\frac{B}{A}\,\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} - \frac{1}{r^2}\right]u = 0} \qquad 11$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر جابجایی شعاعی المان

$$\frac{dE}{dr}=0$$ حالت همگن

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right)=0$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}(ur)\right)=c_1' \Rightarrow d(ur)=c_1' r\,dr$$

$$\Rightarrow ur=\underbrace{\frac{c'}{2}}_{c_1}r^2+c_2$$

$$\boxed{u=c_1 r+\frac{c_2}{r}}$$ ۱۲

$$\begin{cases}\varepsilon_{rr}=\frac{du}{dr}=c_1-\frac{c_2}{r^2} & ۱۳\\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}=c_1+\frac{c_2}{r^2} & ۱۴\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=E(A\varepsilon_{rr}+B\varepsilon_{\theta\theta})=E\left[AC_1-\frac{AC_2}{r^2}+BC_1+\frac{BC_2}{r^2}\right]\\ \sigma_{\theta\theta}=E(B\varepsilon_{rr}+A\varepsilon_{\theta\theta})=E\left[BC_1-\frac{BC_1}{r^2}+AC_1+\frac{AC_2}{r^2}\right]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=\overbrace{E(A+B)}^{A^*}C_1-\overbrace{E(A-B)}^{B^*}C_2\frac{1}{r^2}\\ \sigma_{\theta\theta}=\underbrace{E(A+B)}_{A^*}C_1+\underbrace{E(A-B)}_{B^*}C_2\frac{1}{r^2}\end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = A^* - \frac{B^*}{r^2} \qquad u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A^* + \frac{B^*}{r^2}$$

plane stress: $A = \frac{1}{1-\nu^2}$ & $B = \frac{\nu}{1-\nu^2}$

$$A^* = E(A+B)C_1$$

plane strain:

$$B^* = E(A-B)C_2$$

مطلوب است ماکزیمم تنش محیطی ($\sigma_{\theta\theta}$) ؟ برای یک استوانه جدار ضخیم تحت فشار داخلی P که دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b می باشد:

(جلسه ۲۱/۷/۰۰ چهارشنبه اضافه شود)

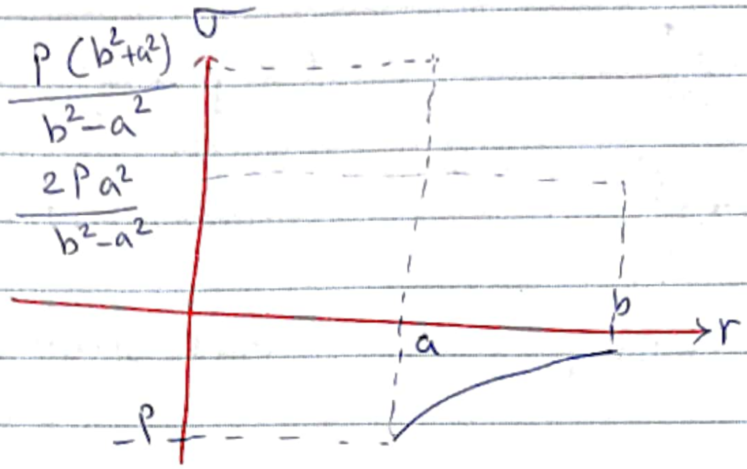
$$\sigma_{rr} = A^* - \frac{B^*}{r^2}$$

$$\sigma_{rr}\big|_{r=a} = -P \qquad \sigma_{rr}\big|_{=b} = 0$$

$$\begin{cases} A^* - \dfrac{B^*}{r^2} = -P \\ A^* - \dfrac{B^*}{r^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow B^* = \frac{Pa^2b^2}{b^2-a^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A^* + \frac{B^*}{r^2} \Rightarrow \sigma_{\theta\theta} = \frac{Pa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)$$

Year. Month. Data. Subject



$$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=a} = \frac{Pa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{P(b^2+a^2)}{b^2-a^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=b} = \frac{2Pa^2}{b^2-a^2} = \frac{P(a^2+b^2)}{b^2-a^2}$$

$$\frac{d\sigma_{\theta\theta}}{dr} = \frac{-2B^*}{r^2} \qquad \frac{d^2\sigma_{\theta\theta}}{dr^2} = \frac{B^*}{r^4} > 0$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{2B^*}{r^2} \qquad \frac{d^2\sigma_{rr}}{dr^2} = -\frac{6B^*}{r^4} < 0$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right]$$

$$u = \frac{r}{E}\left[\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right]$$

MENHAJ

Year. Month. Data. Subject

$$u = \frac{r}{E}\left(A^* + \frac{B^*}{r^2} - \nu\left(A^* - \frac{B^*}{r^2} + \sigma_{zz}\right)\right)$$

$$u\Big|_{r=b} = \frac{b}{E}\left[A^* + \frac{B^*}{b^2} - \nu\left(A^* - \frac{B^*}{b^2} + \sigma_{zz}\right)\right]$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{Plane stress.} \\ \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) & \text{" straine} \end{cases}$$

Plane strain : $\varepsilon_{zz} = 0$

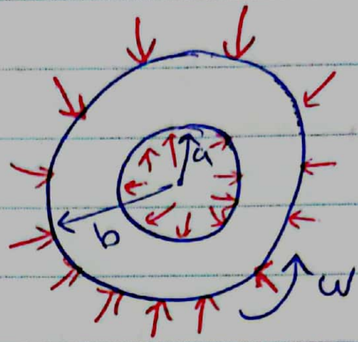
$$\Rightarrow \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})\right] = 0$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \nu\left(A^* - \cancel{\frac{B^*}{r^2}} + A^* + \cancel{\frac{B^*}{r^2}}\right) = 2\nu A^*$$

Scanned with CamScanner

الاستیک

تحلیل متقارن استوانه‌ای جدار ضخیم دوار:



$$\sigma_{rr} = E(A\varepsilon_{rr} + B\varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = E(B\varepsilon_{rr} + A\varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{du}{dr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u}{r} \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} = -\rho r w^2$$

همانند قبل:

$$EA\frac{d^2u}{dr^2} + \left[A\frac{dE}{dr} + \frac{E\cancel{B}}{r} + \frac{E}{r}(A-\cancel{B})\right]\frac{du}{dr}$$

$$+ \left[\frac{B}{r}\cdot\frac{dE}{dr} - \frac{EB}{r^2} + \frac{E}{r^2}(B-A)\right]u = -\rho r w^2$$

$$\times\frac{1}{EA}: \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} + \frac{1}{r}\right]\frac{du}{dr} + \left[\frac{1}{r}\frac{B}{A}\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} - \frac{1}{r^2}\right]u$$

$$= -\frac{\rho w^2}{EA}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{-\rho w^2 r}{EA}$$

حالت همگن: ←

Year. Month. Data. Subject

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right) = -\frac{\rho\omega^2}{2EA}r^2 + C_1' \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr} = -\frac{\rho\omega^2}{2EA}r^2 + C_1'$$

$\times r\,dr$

$$\Rightarrow d(ur) = -\frac{\rho\omega^2}{2EA}r^3 dr + C_1' r\,dr$$

$$ur = -\frac{\rho\omega^2}{8EA}r^4 + \frac{C'}{2}r^2 + C_2$$

$$u = -\frac{\rho\omega^2}{8EA}r^3 + \underbrace{\frac{C_1'}{2}}_{C_1}r + \frac{C_2}{r}$$

$$\boxed{u = C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 r^3 \quad \& \quad C_3 = -\frac{\rho\omega^2}{8EA}}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + 3C_3 r^2$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 r^2$$

$$\sigma_{rr} = E(A\varepsilon_{rr} + B\varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = E(B\varepsilon_{rr} + A\varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\sigma_{rr} = E\left[AC_1 - \frac{AC_2}{r^2} + 3AC_3 r^2 + BC_1 + \frac{BC_2}{r^2} + BC_3 r^2\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = E\left[BC_1 - \frac{BC_2}{r^2} + 3BC_3 r^2 + AC_1 + \frac{AC_2}{r^2} + AC_3 r^2\right]$$

Year. Month. Data. Subject

$$\sigma_{rr} = \underbrace{E(A+B)c_1}_{A^*} + \underbrace{E(A-B)c_2}_{B^*}\frac{1}{r^2} + \underbrace{E(3A+B)c_3}_{C_1^*} r^2$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \underbrace{E(A+B)c_1}_{A^*} + \underbrace{E(A-B)c_2}_{B^*}\frac{1}{r^2} + \underbrace{E(A+3B)c_3}_{C_2^*} r^2$$

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r} + c_3 r^3 \quad \& \quad c_3 = -\frac{\rho\omega^2}{8EA}$$

$$\sigma_{rr} = A^* - \frac{B^*}{r^2} + c_1^* r^2$$

ع. مهم

$$\sigma_{\theta\theta} = A^* + \frac{B^*}{r^2} + c_2^* r^2$$

$$A^* = E(A+B)c_1 \qquad B^* = E(A-B)c_2$$

$$c_1^* = E(3A+B)c_3 \qquad c_2^* = E(A+3B)c_3$$

Planestress $\begin{cases} A = \dfrac{1}{1-\nu^2} \\ B = \dfrac{\nu}{1-\nu^2} \end{cases}$ Plaine strain $\begin{cases} A = \dfrac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \dfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases}$

Year. Month. Data. Subject

یک استوانه جدار ضخیم به شعاع داخلی 10cm و شعاع خارجی 14cm تحت فشار داخلی 40MPa قرار دارد. اگر این استوانه با سرعت زاویه‌ای 100 rad/s با فرض اینکه وارد ناحیه پلاستیک نشده است مطلوب است تنش محیطی در شعاع 12cm و تغییر حجم داخلی استوانه. E و $\nu = 0.3$ و ρ
استوانه در حالت تنش صفحه‌ای می باشد:

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{1-\nu^2} = \dfrac{1}{1-0.09} = 1.098 \\ B = \dfrac{\nu}{1-\nu^2} = \dfrac{0.3}{1-0.09} = 0.329 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A^* - \dfrac{B^*}{r^2} + C_1^* r^2 \\ \sigma_{\theta\theta} = A^* + \dfrac{B^*}{r^2} + C_2^* r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1^* = E(3A+B)C_3 = \cancel{E}(3A+B)\left(\dfrac{-\rho w^2}{8\cancel{E}A}\right) = -36230\rho \\ C_2^* = E(A+3B)C_3 = E(A+3B)\left(-\dfrac{\rho w^2}{8EA}\right) = -20850\rho \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = A^* - \frac{B^*}{r^2} - 36230\rho r^2$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A^* + \frac{B^*}{r^2} - 20850\rho r^2$$

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=0.1} = -40\times10^6$$

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=0.14} = 0 \longrightarrow$$ در سطح خارجی فشار نداریم

Year. .... Month. .... Data. .... Subject ....

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A^* - \dfrac{B^*}{0.1^2} - 36230\rho(0.1)^2 = -40\times10^6 \\ \sigma_{rr} = A^* - \dfrac{B^*}{(0.14)^2} - 36230\rho(0.14)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^* = \checkmark \qquad B^* = \checkmark$$

$$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=0.12} = A^* + \frac{B^*}{(0.12)^2} - 20850\rho(0.12)^2 = \checkmark$$

$$V_1 = \pi r_i^2 L = \pi(0.1)^2 L$$

$$V_2 = \pi\left(r_i + u|_{r=r_i}\right)^2 L$$

روش اول: تنش صفحه‌ای

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$$

$$u = r\varepsilon_{\theta\theta} = r\frac{1}{E}\left[\sigma_{\theta\theta} - \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}\right)\right]$$

$$u|_{r=0.1} = 0.1\,\frac{1}{E}\left[\sigma_{\theta\theta}|_{r=0.1} - 0.3\left(\sigma_{rr}|_{r=0.1}\right)\right]$$

جاگذاری در V_2

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \checkmark$$

روش دوم

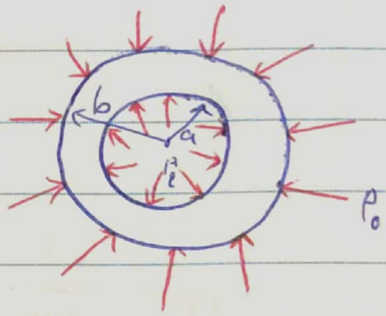
$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r} + c_3 r^3$$

$$A^* = E(A+B)\,c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{A^*}{E(A+B)} = \checkmark$$

$$B^* = E(A-B)\,c_2 \Rightarrow c_2 = \checkmark \qquad c_3 = \frac{-\rho\omega^2}{8EA}$$

$$\Rightarrow u|_{r=0.1} = \checkmark$$

تحلیل الاستیک مخازن جدار ضخیم کروی:



$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu(\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{\varphi\varphi})\right] \\[2ex] \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi})\right] \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{rr} + 2\nu\,\varepsilon_{\varphi\varphi}\right] \\[2ex] \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\,\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}\right] \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = E\left[\overset{A}{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}\,\varepsilon_{rr} + \overset{B}{\frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}\,\varepsilon_{\varphi\varphi}\right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = E\left[\overset{B}{\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}\,\varepsilon_{rr} + \overset{A+B}{\frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}}\,\varepsilon_{\varphi\varphi}\right]$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A\,\varepsilon_{rr} + 2B\,\varepsilon_{\phi\phi}\right) & (1) \\ \sigma_{\phi\phi} = E\left(B\,\varepsilon_{rr} + (A+B)\,\varepsilon_{\phi\phi}\right) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{du}{dr} & (3) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \dfrac{u}{r} & (4) \end{cases}$$

معادله : $\dfrac{d\sigma_{rr}}{dr} + \dfrac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi})}{r} = 0$ (5)

3 و 4 $\longrightarrow$ 1 و 2

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A\dfrac{du}{dr} + 2B\dfrac{u}{r}\right) & (6) \\ \sigma_{\phi\phi} = E\left(B\dfrac{du}{dr} + (A+B)\dfrac{u}{r}\right) & (7) \end{cases}$$

6 و 7 $\longrightarrow$ 5

بدون فرض همگن بودن :

$$\frac{dE}{dr}\left[A\frac{du}{dr} + 2B\frac{u}{r}\right] + E\left[A\frac{d^2u}{dr^2} + 2B\left(\frac{1}{2}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{2E}{r}\left[(A-B)\frac{du}{dr} + (B-A)\frac{u}{r}\right] = 0$$

Year. Month. Data. Subject

$\frac{dE}{dr}=0$ معادله همگن

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}-\frac{2}{r^2}u=0 \quad 8$$

معادله کوشی اویلر همگن

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(ur^2)\right)=0$$

$$=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\left(2ur+r^2\frac{du}{dr}\right)\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{2u}{r}+\frac{du}{dr}\right)=-\frac{2u}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{du^2}{dr^2}$$

9

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(ur^2)\right]=0 \quad 10$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(ur^2)=c_1'$$

$$d(ur^2)=c_1'r^2dr \Rightarrow ur^2=c_1'\frac{r^3}{3}+c_2$$

$$u=\underbrace{\frac{c_1'}{3}}_{c_1}r+\frac{c_2}{r^2} \Rightarrow \boxed{u=c_1r+\frac{c_2}{r^2}} \quad 11$$

حفظ شود

$$\varepsilon_{rr}=\frac{du}{dr}=c_1-\frac{2c_2}{r^3} \quad 12$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}=c_1+\frac{c_2}{r^3} \quad 13$$

(12), (13) → (14)

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left[AC_1 - \frac{2AC_2}{r^3} + 2BC_1 + \frac{2BC_2}{r^3}\right] \\ \sigma_{\phi\phi} = E\left[BC_1 - \frac{2BC_2}{r^3} + (A+B)C_1 + (A+B)\frac{C_2}{r^3}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \left[\underbrace{E(A+2B)C_1}_{A^*} - \underbrace{2E(A-B)C_2}_{B^*}\frac{1}{r^3}\right] \\ \sigma_{\phi\phi} = \left[\underbrace{E(A+2B)C_1}_{A^*} + \underbrace{E(A-B)C_2}_{\frac{B^*}{2}}\frac{1}{r^3}\right] \end{cases}$$

ϕ

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \left(A^* - \frac{B^*}{r^3}\right) & (14) \\ \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} = \left(A^* + \frac{B^*}{2r^3}\right) & (15) \end{cases}$$

حفظ شود

روابط حفظی کروی

$$\begin{cases} u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \\ \sigma_{rr} = A^* - \frac{B^*}{r^3} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A^* + \frac{B^*}{2r^3} \\ u = r\varepsilon_{\phi\phi} = r\frac{1}{E}\left[\sigma_{\phi\phi} - \nu(\sigma_{rr} + \underbrace{\sigma_{\theta\theta}}_{=\sigma_{\phi\phi}})\right] \end{cases}$$

$A^* = E(A+2B)C_1$

$B^* = 2E(A-B)C_2$

$A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ $\quad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Year. Month. Data. Subject

Ex: یک مخزن تحت فشار کروی جدار ضخیم به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b تحت فشار داخلی P قرار دارد. مطلوب است تغییرات تنش شعاعی و محیطی و تعیین حداکثر تنش محیطی و همچنین تغییر ضخامت پوسته؟

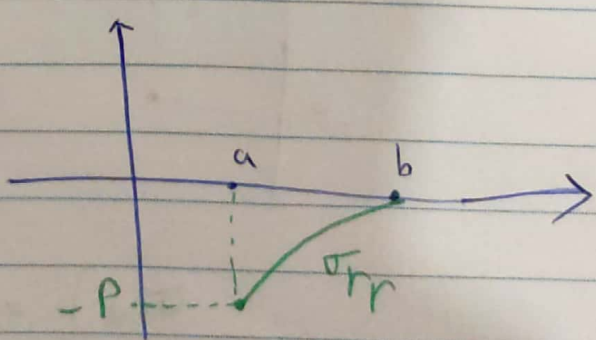
پاسخ:

$$\sigma_{rr} = A^* - \frac{B^*}{r^3}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}\big|_{r=a} = -P \\ \sigma_{rr}\big|_{r=b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^* - \dfrac{B^*}{a^3} = -P \\ A^* - \dfrac{B^*}{b^3} = 0 \Rightarrow B^* = A^* b^3 \end{cases}$$

$$A^* - A^* \frac{b^3}{a^3} = -P \Rightarrow A^* = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3} \quad \& \quad b^* = \frac{Pa^3 b^3}{b^3 - a^3}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 - \dfrac{b^3}{r^3}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 + \dfrac{b^3}{2r^3}\right) \end{cases}$$



MENHAJ

$$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=a} = \frac{Pa^3}{b^3-a^3}\left(1+\frac{b^3}{2a^3}\right) =$$

$$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=a} = \frac{P(2a^3+b^3)}{2(b^3-a^3)} = \frac{3P}{2(b^3-a^3)}$$

فرض کنیم که $\sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=a} > \sigma_{rr}\Big|_{r=a}$

$$\left|\frac{P(2a^3+b^3)}{2(b^3-a^3)}\right| > P \rightarrow 2a^3+b^3 > 2(b^3-a^3)$$

$$2a^3+b^3 > 2b^3-2a^3$$

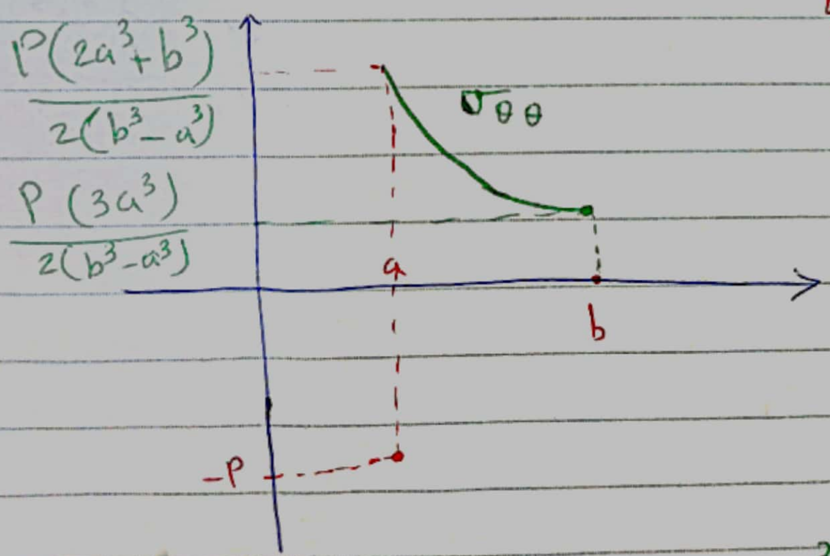
$$4a^3 > b^3 \Rightarrow b < a\sqrt[3]{4}$$

$$\boxed{b < 1.587a}$$

$\Downarrow$

$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=a} > \sigma_{rr}\Big|_{r=a}$

درصورتی که $b < 1.587a$



$$\sigma_{\theta\theta}\Big)_{max} = \sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=a} = \frac{P(3a^3)}{2(b^3-a^3)}$$

$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{r=a}$ max $\Rightarrow$ if $b < 1.587a$

$\sigma_{rr}\Big|_{r=a}$ max $\Rightarrow$ if $b > 1.587a$

Year. Month. Data. Subject

$\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta}$

$$u\Big|_{r=a} = r\varepsilon_{\theta\theta}\Big|_{r=a} = r\frac{1}{E}\left[\sigma_{\phi\phi} - \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right)\right]\Big|_{r=a}$$

$$u = \frac{r}{E}\left[(1-\nu)\,\sigma_{\phi\phi} - \nu\sigma_{rr}\right]$$

$$u = \frac{r}{E}\left[(1-\nu)\left(A^* + \frac{B^*}{2r^3}\right) - \nu\left(A^* - \frac{B^*}{r^3}\right)\right]$$

$$u = \frac{r}{E}\left[(1-2\nu)\,A^* + \frac{B^*}{2r^3}\,(1-\nu+2\nu)\right]$$

$$u = \frac{r}{E}\left[(1-2\nu)\,A^* + \frac{B^*}{2r^3}\,(1+\nu)\right]$$

$$u\Big|_{r=a} = \frac{a}{E}\left[(1-2\nu)A^* + \frac{B^*}{2a^3}\,(1+\nu)\right]$$

$$u\Big|_{r=b} = \frac{b}{E}\left[(1-2\nu)A^* + \frac{B^*}{2b^3}\,(1+\nu)\right]$$

$$r_i)_{New} = a + u\Big|_{r=a} = \checkmark$$

$$r_o)_{New} = b + u\Big|_{r=b} = \checkmark$$

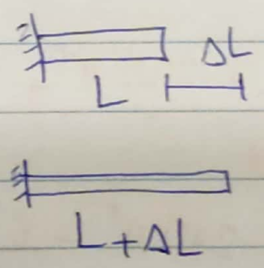
$$t_{New} = r_o)_{New} - r_i)_{New} = b-a+u|_{r=b} - u|_{r=a}$$

$$\Delta t = t_{New} - \underbrace{t_{old}}_{b-a} = u|_{r=b} - u|_{r=a}$$

بار حرارتی:

$$\Delta L = L\alpha\Delta T$$

ضریب انبساط حرارتی خطی ← واحد $\frac{1}{^\circ K}$



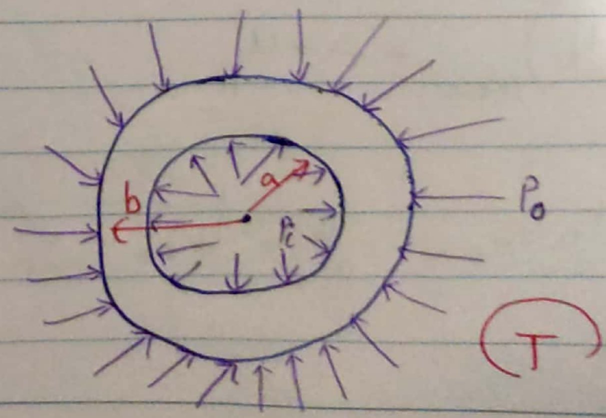
$$\varepsilon^T = \frac{\Delta L}{L} = \alpha\Delta T$$

$\Delta T : T$ ← منظور

$$\Delta T = T - T_0$$

→ دمایی که در آن کرنش نداریم

تحلیل الاستیک مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار داخلی و بار حرارتی:



$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})\right] + \varepsilon^{T} \rightarrow \alpha \Delta T \\[2ex] \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right] + \varepsilon^{T} \\[2ex] \varepsilon_{zz} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right] + \varepsilon^{T} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} + \nu\sigma_{zz} = E\varepsilon_{rr} - E\alpha\Delta T \\ -\nu + \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{zz} = E\varepsilon_{\theta\theta} - E\alpha\Delta T \\ -\nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} - E\alpha\Delta T \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\begin{vmatrix} E\varepsilon_{rr} - E\alpha\Delta T & -\nu & -\nu \\ E\varepsilon_{\theta\theta} - E\alpha\Delta T & 1 & -\nu \\ E\varepsilon_{zz} - E\alpha\Delta T & -\nu & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big[(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})\Big] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

بهمین ترتیب

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big[(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})\Big] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{rr})\Big] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} + E\,C\,\alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad C = \frac{-1}{1-2\nu}$$

Year. Month. Data. Subject

$\sigma_{rz}=\sigma_{zz}=\sigma_{\theta z}=0$: Plane stress — 1 درحالت تنش صفحه‌ای

$\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{rz}=\varepsilon_{\theta z}$ — 2 درحالت کرنش صفحه‌ای

2 Plane straine

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{rr}+\nu\varepsilon_{\theta\theta}\right]-\frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

$$\sigma_{\theta\theta}= \quad '' \quad \left[(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}+\nu\varepsilon_{rr}\right]- \quad ''$$

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=E(A\varepsilon_{rr}+B\varepsilon_{\theta\theta})+E\,C\alpha T & (1)\\ \sigma_{\theta\theta}=E(B\varepsilon_{rr}+A\varepsilon_{\theta\theta})+E\,C\alpha T & (2)\\ A=\dfrac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \underbrace{B=\dfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}_{\text{Plane straine}} \quad C=\dfrac{-1}{1-2\nu} & (3)\end{cases}$$

(1) → Plane stress ✓, Plane straine ✓

(2) → " " ✓, " " ✓

درحالت Plane stress

$$(4)\quad A=\frac{1}{1-\nu^2} \qquad B=\frac{\nu}{1-\nu^2} \qquad C=\frac{-1}{1-\nu}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{rr}=\dfrac{du}{dr} & (5)\\ \varepsilon_{\theta\theta}=\dfrac{u}{r} & (6)\end{cases}$$

6, 5 $\longrightarrow$ 1, 2

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A\dfrac{du}{dr} + B\dfrac{u}{r}\right) + EC\alpha T & (7) \\[2ex] \sigma_{\theta\theta} = E\left(B\dfrac{du}{dr} + A\dfrac{u}{r}\right) + EC\alpha T & (8) \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{dE}{dr}\left(A\frac{du}{dr} + B\frac{u}{r}\right) + E\left(A\frac{d^2u}{dr^2} + B\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right)\right) + c\frac{d}{dr}(E\alpha T)$$

$$+ \frac{E}{r}\left((A-B)\frac{du}{dr} + (B-A)\frac{u}{r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (EA)\frac{d^2u}{dr^2} + \left[A\frac{dE}{dr} + \cancel{\frac{EB}{r}} + \cancel{\frac{E}{r}(A-B)}\right]\frac{du}{dr}$$

$$+ \left[\frac{B}{r}\frac{dE}{dr} - \cancel{\frac{EB}{r^2}} + \cancel{\frac{E}{r^2}(B-A)}\right]u + c\frac{d}{dr}(E\alpha T) = 0$$

$$\times \frac{1}{EA}: \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} + \frac{1}{r}\right]\frac{du}{dr} + \left[\frac{1}{r}\frac{B}{A}\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} - \frac{1}{r^2}\right]u$$

$$+ \frac{c}{EA}\frac{d}{dr}(E\alpha T) = 0 \qquad (10)$$

Year. ______ Month. ______ Data. ______ Subject ______

اگر ماده همگن باشد: $\frac{dE}{dr}=0$ $\frac{d\alpha}{dr}=0$ &

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=-\frac{c\alpha}{A}\frac{dT}{dr} \quad (11)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right)=-\frac{c\alpha}{A}\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)=c\alpha T+c_1'$$

$$d(ur)=c\alpha Tr\,dr+c_1'r\,dr$$

$$ur=c\alpha\int Tr\,dr+\frac{c_1'}{2}r^2+c_2$$

$$\boxed{u=c\alpha\frac{1}{r}\int_a^r Tr\,dr+c_1r+\frac{c_2}{r}} \quad (12)$$ جابجایی شعاعی در راستای r

$$\varepsilon_{rr}=\frac{du}{dr}=c\alpha\left[-\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr\,dr+\frac{1}{r}(Tr)\right]+c_1-\frac{c_2}{r^2}$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{-c\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,dr+c\alpha T+c_1-\frac{c_2}{r^2} \quad 13$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}=\frac{c\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,dr+c_1+\frac{c_2}{r^2} \quad (14)$$

Year. Month. Data. Subject

13,14 → 7,8

$$\sigma_{rr} = E\left[-A\frac{C\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + A\alpha T + AC_1 - \frac{AC_2}{r^2} + \frac{BC\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + BC_1 + \frac{BC_2}{r^2} \right] + E\alpha \cancel{C} T$$

$$\sigma_{\theta\theta} = E\left[-\frac{BC\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + BC\alpha T + BC_1 - \frac{BC_2}{r^2} + \frac{AC\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + AC_1 + \frac{AC_2}{r^2} \right] + EC\alpha T$$

$$\sigma_{rr} = \overbrace{E(A+B)C_1}^{A^*} - \overbrace{E(A-B)C_2}^{B^*}\frac{1}{r^2} - \overbrace{EC\alpha(A-B)}^{C^*}\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + \underbrace{EC\alpha(A+1)}_{D_1^*} T \qquad (15)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \overbrace{E(A+B)C_1}^{A^*} + \overbrace{E(A-B)}^{B^*}C_2\frac{1}{r^2} + \overbrace{EC\alpha(A-B)}^{C^*}\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + EC\alpha(B+1)\,T D_2^* \qquad (16)$$

$$\sigma_{rr} = A^* - \frac{B^*}{r^2} - C^*\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + D_1^* T$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A^* + \frac{B^*}{r^2} + C^*\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + D_2^* T$$

$$u = C\alpha\frac{1}{r}\int_a^r Tr\,dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Year. .... Month. .... Data. .... Subject ....

$$A^* = E(A+B)C_1$$
$$B^* = E(A-B)C_2$$
$$C^* = EC\alpha(A-B)$$
$$D_1^* = EC\alpha(A+1)$$
$$D_2^* = EC\alpha(B+1)$$

نکته:

plane stress → $A = \frac{1}{1-\nu^2}$, $B = \frac{\nu}{1-\nu^2}$

plane strain → $A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Exa: یک مخزن استوانه‌ای تحت فشار داخلی 30 MPa و فشار خارجی 10 MPa قرار دارد اگر این مخزن تحت تأثیر بار حرارتی به صورت $T = Kr$ قرار بگیرد مطلوب است تغییر ضخامت مخزن؟

شرایط: Plane stress

$\nu = 0.3$, $E = 200\,GPa$

$\alpha = 10^{-3}\ /^{\circ}C$, $K = 300$

شعاع داخلی مخزن 30 cm

شعاع خارجی 50 cm

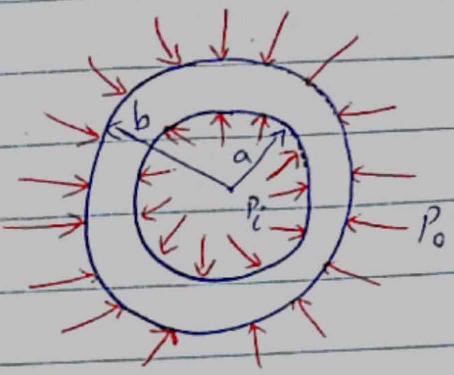
کلا مثالای بی جواب H.w هستن،استاد حلشون نکرده

MENHAJ

Scanned with CamScanner

Year. ——— Month. ——— Data. ——— Subject ———

تحلیل مخازن جدار ضخیم کروی تحت فشار و بار حرارتی



$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}\right) + \alpha T \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})\right] + \alpha T \\ \& \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} \end{cases}$$

$$\times\nu \begin{cases} \sigma_{rr} - 2\nu\sigma_{\varphi\varphi} = E\varepsilon_{rr} - E\alpha T \\ -\nu\sigma_{rr} + (1-\nu)\sigma_{\varphi\varphi} = E\varepsilon_{\theta\theta} - E\alpha T \end{cases}$$

$$(1-\nu-2\nu^2)\sigma_{\varphi\varphi} = E(\nu\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - E\alpha T\cancel{(1+\nu)}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = E\left(\frac{\nu}{1-\nu-2\nu^2}\varepsilon_{rr} + \frac{1}{1-\nu-2\nu^2}\varepsilon_{\varphi\varphi}\right) - \frac{E\alpha T(\cancel{1+\nu})}{\underset{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu-2\nu^2}}$$

$$\sigma_{rr} = E\left(\frac{2\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}\varepsilon_{rr} + \frac{2\nu}{1-\nu-2\nu^2}\varepsilon_{\varphi\varphi}\right) - E\alpha T\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}\right)$$

$$+ E\varepsilon_{rr} - E\alpha T$$

MENHAJ

Scanned with CamScanner

$$\sigma_{rr} = E\left(\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}\varepsilon_{rr} + \frac{2\nu}{1-\nu-2\nu^2}\varepsilon_{\varphi\varphi}\right) - E\alpha T\left(1+\frac{2\nu}{1-2\nu}\right)$$

$$\sigma_{rr} = E\left(\overbrace{\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}}^{A^*}\varepsilon_{rr} + \underbrace{\frac{2\nu}{1-\nu-2\nu^2}}_{B^*}\varepsilon_{\varphi\varphi}\right) + E\alpha\, T\underbrace{\left(\frac{-1}{1-2\nu}\right)}_{C^*}$$

$$\sigma_{rr} = E\left(A^*\varepsilon_{rr} + 2B^*\varepsilon_{\varphi\varphi}\right) + EC^*\alpha T \quad (1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = E\left(B^*\varepsilon_{rr} + (A^*+B^*)\varepsilon_{\varphi\varphi}\right) + EC^*\alpha T \quad (2)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} \quad (4)$$

$$A^* = \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \qquad C^* = \frac{-1}{1-2\nu} \qquad B^* = \frac{\nu}{1-\nu-2\nu^2} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} \quad (5)$$

$$(4), (5) \rightarrow (1), (2)$$

$$\sigma_{rr} = E\left(A^*\frac{du}{dr} + 2B^*\frac{u}{r}\right) + EC^*\alpha T \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = E\left(B^*\frac{du}{dr} + (A^*+B^*)\frac{u}{r}\right) + EC^*\alpha T \quad (7)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) = 0 \quad (8)$$

(رابطه تعادل المان)

(6) و (7) → (8)

$$\frac{dE}{dr}\left[A^*\frac{du}{dr}+2B^*\frac{u}{r}\right]+E\left[A^*\frac{d^2u}{dr^2}+2B^*\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}\right)\right]$$

$$+C^*\frac{d}{dr}(E\alpha T)+\frac{2E}{r}\left[(A^*-B^*)\frac{du}{dr}+(B^*-A^*)\frac{u}{r}\right]=0 \qquad (9)$$

$$(EA^*)\frac{d^2u}{dr^2}+\left[A^*\frac{dE}{dr}+\frac{2EB^*}{r}+\frac{2E}{r}(A^*-B^*)\right]\frac{du}{dr}$$

$$+\left[\frac{2B^*}{r}\frac{dE}{dr}-\frac{2EB^*}{r^2}+\frac{2E}{r^2}(B^*-A^*)\right]u=-C^*\frac{d}{dr}\left[E\alpha T\right]$$

$\times \frac{1}{EA^*}$:

$$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2}+\left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr}+\frac{2}{r}\right]\frac{du}{dr}+\left[2\frac{B^*}{A^*}\frac{1}{r}\frac{1}{E}\frac{dE}{dr}-\frac{2}{r^2}\right]u=-\frac{C^*}{EA^*}\frac{d}{dr}(E\alpha T)} \qquad (10)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر جابه‌جایی شعاعی المان

اگر ماده همگن باشد: $\frac{dE}{dr}=\frac{d\alpha}{dr}=0$

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}-\frac{2u}{r^2}=-\frac{c^*\alpha}{A^*}\frac{dT}{dr} \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(ur^2)\right)=-\frac{c^*\alpha}{A^*}\frac{dT}{dr} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(ur^2)=-\frac{c^*\alpha}{A^*}T+c_1'$$

$$d(ur^2)=-\frac{c^*\alpha}{A^*}Tr^2dr+c_1'r^2dr$$

$$ur^2=-\frac{c^*\alpha}{A^*}\int_a^r Tr^2dr+\overset{c_1}{\frac{c_1'}{3}}r^3+c_2$$

$$u=c_1r+\frac{c_2}{r^2}-\frac{c^*\alpha}{A^*}\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr^2dr \qquad (13)$$

$$(14) \qquad \varepsilon_{rr}=\frac{du}{dr}=c_1-\frac{2c_2}{r^3}-\frac{c^*\alpha}{A^*}\left[-\frac{2}{r^3}\int_a^r Tr^2dr+\frac{1}{r^2}(Tr^3)\right]$$

$$(15) \qquad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}=c_1+\frac{c_2}{r^3}-\frac{c^*\alpha}{A^*}\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2dr$$

14 6,15 ⟶ 1, E

$$\sigma_{rr} = E\Big[A^*C_1 - \frac{2A^*C_2}{r^3} + \frac{2A^*C^*\alpha}{A^*}\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2dr - \frac{A^*C^*\alpha}{A^*}T$$

$$+2B^*C_1 + \frac{2B^*C_3}{r^3} - \frac{2B^*C^*\alpha}{A^*}\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2dr\Big] + EC^*\alpha T$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = E\Big[2B^*C_1 - \frac{2B^*C_2}{r^3} - \frac{B^*C^*\alpha}{A^*}\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2dr - \frac{B^*C^*\alpha}{A^*}T$$

$$+(A^*+B^*)C_1 + \frac{(A^*+B^*)C_2}{r^3} - \frac{(A^*+B^*)C^*\alpha}{A^*}\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2dr\Big]$$

ساده سازی می کنیم

$$\sigma_{rr} = \overbrace{E(A^*+2B^*)}^{A^*}C_1 - \overbrace{2E(A^*-B^*)}^{B^*}C_2\frac{1}{r^3} - \overbrace{\frac{2B^*C^*\alpha}{A^*}\left(1-\frac{A^*}{B^*}\right)}^{C^*}\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2dr$$

$$+EC^*\alpha T$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \overbrace{E(A^*+2B^*)}^{A^*}C_1 + \overbrace{E(A^*-B^*)}^{B^*}C_2\frac{1}{r^3} - \frac{C^*\alpha}{A^*}(2B^*-A^*-B^*)$$

$$\times\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2dr + EC^*\alpha T\left(-\frac{B^*}{A^*}+1\right)$$

Year. Month. Data. Subject

$$\sigma_{\phi\phi} = \overbrace{E(A^* + 2B^*)C_1}^{A^*} + \overbrace{E(A^* - B^*)C_2}^{\frac{B^*}{2}}\frac{1}{r^3} + \overbrace{\frac{BC}{A}\alpha\left(1 - \frac{A}{B}\right)}^{\frac{C^*}{2}} \times \frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2 dr$$

$$+ \overbrace{EC\alpha\left(1 - \frac{B}{A}\right)}^{D^*} T$$

$$\sigma_{rr} = A^* - \frac{B^*}{r^3} - \frac{C^*}{r^3}\int_a^r Tr^2 dr$$

$$\sigma_{\phi\phi} = A^* + \frac{B^*}{2r^3} + \frac{C^*}{2r^3}\int_a^r Tr^2 dr + D^* T$$

$$A^* = E(A + 2B)C_1 \qquad A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$B^* = 2E(A - B)C_2 \qquad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C^* = \frac{2BC\alpha}{A}\left(1 - \frac{A}{B}\right) \qquad C = \frac{-1}{1-2\nu}$$

$$D^* = EC\alpha\left(1 - \frac{B}{A}\right)$$

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} - \frac{C\alpha}{A}\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr^2 dr$$

Year. .... Month. .... Data. .... Subject ....

Exa: کره‌ای جدار ضخیم به شعاع داخلی 20cm و ضخامت جداره 5cm تحت فشار خارجی 30MPa قرار دارد. اگر ضخامت جداره تحت گرادیان دمای $T=1000r^2$ قرار گیرد مطلوبست تغییر حجم داخلی مخزن نسبت به حالتی که تحت فشار و دما قرار ندارد (یعنی نسبت به حجم اولیه)

$E = 200\ GPa$ $\nu = 0.3$ $\alpha = (1.6)(10^{-6})\ 1/{}^{\circ}K$

راهنمای حل سوال قبل

$$\Delta a = u\Big|_{r=a} = r\,\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{r}{E}\left[\sigma_{\phi\phi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi})\right]\Big|_{r=a}$$

$$\Delta a = \frac{a}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{\phi\phi}\Big|_{r=a} - \nu\,\sigma_{rr}\Big|_{r=a}\right]$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}\Big|_{r=a} = 0 \\ \sigma_{rr}\Big|_{r=b} = -30(10^6) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A^* - \dfrac{B^*}{0.2^3} - \dfrac{C^*}{(0.2)^3}\underbrace{\displaystyle\int_{0.2}^{0.2}(100r^2)r^2\,dr}_{=0} \longrightarrow A^* = \checkmark \\ A^* - \dfrac{B^*}{0.25^3} - \dfrac{C^*}{(0.25)^3} \times \displaystyle\int_{0.2}^{0.25}(100r^2)r^2\,dr = -30(10^6) \end{cases}$$

$$B^* = \checkmark$$

$$\sigma_{\phi\phi}\Big|_{r=a} = A^* + \frac{B^*}{2r^3} + \frac{C^*}{2r^3}\underbrace{\int_a^a(\ \ )\,dr}_{\to 0} + D^*(100r^2)\Big|_{r=a}$$

$$\Delta a = \checkmark \to \upsilon_2 = \checkmark \qquad \Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \checkmark$$

Year. .... Month. .... Data. .... Subject ....

یک مخزن کروی جدار ضخیم به شعاع داخلی 30cm و شعاع خارجی 40cm تحت فشار داخلی و خارجی یکسان 20MPa قرار گرفته است مطلوب است اگر تابع به صورت $T=\frac{1000}{r^2}$ باشد، مقادیر تنش شعاعی و محیطی را در وسط جداره بدست آورید. همچنین حداکثر تنش محیطی در چه شعاعی از کره اتفاق می افتد؟

FGM

زمانی که جنس محیط از ماده غیر همگن باشد برای بدست آوردن وضعیت جابه‌جایی و تنش‌ها در نقاط مختلف جداره محیط راه حل تحلیلی دقیق فقط در شرایط خاص قابل بدست آوردن است در غیر اینصورت باید از روش‌های عددی کمک گرفت

یکی از مواد ناهمگن پیشرفته مواد مدرج تابعی می‌باشد که واژه انگلیسی آن FGM (Functionally Graded Ma این نوع از مواد که بعضی مواقع به عنوان مواد هدفمند از آن‌ها نام برده می‌شود مواد کامپوزیت پیشرفته‌ای هستند که خواص ماده به صورت پیوسته تغییر می‌یابد از نقطه‌ای به نقطه دیگر معمولا ترکیب اصلی این مواد فلز و سرامیک می‌باشند

ایده مواد FG در دهه 80 میلادی توسط گروهی از دانشمندان ژاپنی با سرپرستی آقای پرفسور NINO مطرح شد که در دهه بعد مهمترین پروژه مطرح در ژاپن بود از آن جایی که خواص این مواد به صورت تدریجی تغییر می‌کند کاربردهای وسیعی می‌توان برای آن در نظر گرفت به عنوان مثال در برگشت یک شاتل به زمین دمای دماغه آن چندین برابر سطح خورشید می‌شود لذا باید ماده مورد استفاده در دماغه شاتل تحمل دمای آن را داشته باشد لذا باید از سرامیک‌های خاص استفاده شود از طرفی اتصال سرامیک به بدنه فلزی کاری بسیار سخت است و می‌تواند منجر به حوادث جبران ناپذیری گردد همچنان که برای سفینه کلمبیا که تعداد قابل توجهی

از فضانوردان ناسا در آن قرار داشتند دچار حادثه گردید و تمامی سرنشینان کشته شدند.

ایده ساده FG کمک می‌نماید پوشش سازه‌ای داشته باشد با سرامیک که آرام آرام با پوشش

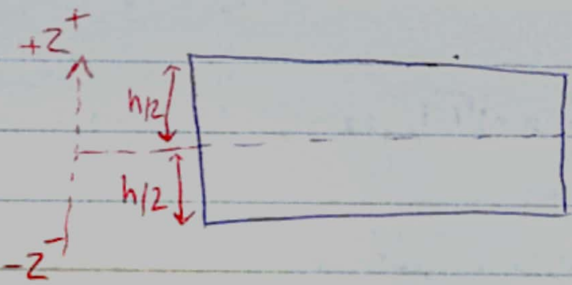
که قابلیت اتصال به بدنه فلزی را داشته باشد

در طبیعت نیز مواد FGM وجود دارد که پوست موز از جمله آن هاست.

$$V_m = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n$$

Volume Fraction

نسبت حجمی



$$V_m\big|_{z=h/2} = 1 \qquad V_m\big|_{z=-h/2} = 0$$

شکل نمودار $V_m - z/h$ (نسبت حجمی)

P_f و P_j

خواص موثر ماده در لایه FGM

$$P_f = \sum_{j=1} P_j V_f$$

$$\sum_{j=1} V_{f_j} = 1$$

$\alpha_f \rightarrow$ ضریب انبساط حرارتی

$$P_j = P_0\left(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3\right)$$

P_0 و P_{-1} ، P_1 ، ... $\rightarrow$ از جدول برای مواد مختلف می‌خوانیم

Year. Month. Data. Subject

مدل گیبسون:

$$E_f(Z,T) = \left[E_m(T) - E_c(T)\right]\left(\frac{2Z+h}{2h}\right)^N + E_c(T)$$

Table 1-2

MENHAJ

Year. Month. Data. Subject

جای خالی ها جداول هستن!داده های جداول احتمالا توی امتحان میدن

$$\alpha_f(Z,T) = \left[\alpha_m(T) - \alpha_c(T)\right]\left(\frac{2Z+h}{2h}\right)^N + \alpha_c(T)$$

Year. ______ Month. ______ Data. ______ Subject ______

تمرین: در دمای $300^\circ K$ برای یک ~~Plate~~ پلیت که خواص آن از سطح پایینی $\left(z=-\frac{h}{2}\right)$

فولاد ضد زنگ تا $z=\frac{h}{2}$ نیکل به صورت ماده مدرج تابعی تغییر می کند در $z=0.1m$

Steel Nickle!

مقادیر ضریب پواسون و مدول الاستیسیته را بدست آورید فرض نمایید ضخامت کل پلیت

0.03 است.

مدرج
مدل mari-Tanaka برای مواد تابعی

پراکندگی حجمی

$$\frac{k_f - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{V_2}{1+(1-V_2)\left(3(k_2-k_1)\right)/\left(3k_1+4G_1\right)}$$

$$\frac{G_f - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1+(1-V_2)\left((G_2-G_1)/(G_1+f_1)\right)}$$

$$\frac{\alpha_f - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/k_f)-(1/k_1)}{(1/k_2)-(1/k_1)}$$

$$\frac{k_f - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{V_2}{1+(1-V_2)\left((k_2-k_1)/3k_1\right)}$$

$$V_1 - V_2 = 1$$

$$f_1 = \frac{G_1(9k_1+8G_1)}{6(k_1+2G_1)}$$

Year. .... Month. .... Data. .... Subject ....

V_1 = Volume fraction . the matrix Phase

V_2 = 〃 〃 Particulater

k_f = The effective local. bulk modul s

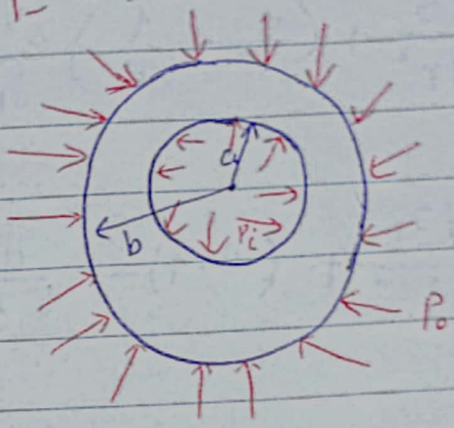
G_f = Thermal conductivity

α_f = Thermal expansion coefficient

یکی از ساده‌ترین مواد مرکب ترکیب کاه و گل است می‌دانیم که گل به تنهایی در برابر بارگذاری‌های مختلف ناپایدار است اما وقتی با کاه ترکیب می‌شود مقاومت خوبی از خودشان می‌دهند گل و یک فاز الیاف (کاه) تشکیل می‌شود که قرار نیست باهم واکنش شیمیایی انجام دهند ولی هدف مورد نظر را تامین می‌کند.

تحلیل الاستیک مخازن FGM جدار ضخیم استوانه‌ای تحت فشار (مخازن استوانه‌ای)

عجب شکل مبهمی ! :)



shell پوسته → thin $t/R_{min} < \frac{1}{20}$; thik 〃 $> \frac{1}{20}$

از آن جایی که معادلات مربوط به مخزن استوانه جدار ضخیم که در درس اول گفته شد، در ابتدا خواص ماده ناهمگن فرض شده بود لذا در اینجا از همان معادله شماره ۱ می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} + \frac{1}{r}\right]\frac{du}{dr} + \left[\frac{1}{r}\frac{B}{A}\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} - \frac{1}{r^2}\right]u = 0 \quad (1)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر جابه‌جایی شعاع الکال

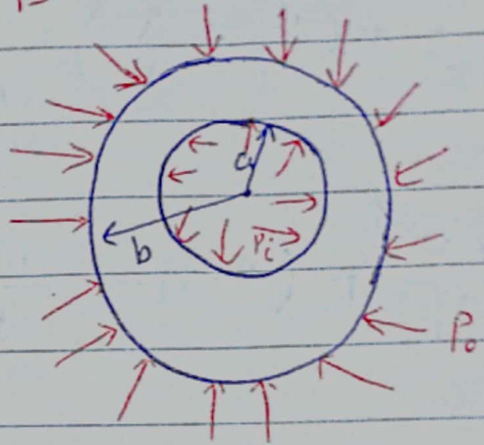
یکی از پرکاربردترین مدل‌های ماده FGM به شکل رابطه زیر می‌باشد:

$$E = E_i\left(\frac{r}{a}\right)^n = E_i a^{-n} r^n \quad (2)$$

n: ثابت ناهمگنی

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} = \frac{1}{\cancel{E_i a^{n}} r^{n}} \cancel{E_i a^{n}}\, n r^{n-1} = \frac{n}{r} \quad (3)$$

تحلیل الاستیک مخازن جدار ضخیم FGM استوانه‌ای تحت فشار (مخازن استوانه‌ای)



عجیب شکل میشی ! :)

shell پوسته → thin $t/R_{min} < \frac{1}{20}$

→ thik 〃 $> \frac{1}{20}$

از آن جایی که معادلات مربوط به مخزن استوانه جدار ضخیم که در درس اول گفته شد، در ابتدا خواص ما ناهمگن فرض شده بود لذا در اینجا از همان معادله شماره ۱ می توانیم استفاده کنیم:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} + \frac{1}{r}\right]\frac{du}{dr} + \left[\frac{1}{r}\frac{B}{A}\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} - \frac{1}{r^2}\right]u = 0 \qquad (1)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر جابجایی شعاعی

یکی از پرکاربردترین مدل های ماده FGM به شکل رابطه زیر می باشد:

$$E = E_i\left(\frac{r}{a}\right)^n = E_i\, a^{-n} r^n \qquad (2)$$

n: ثابت ناهمگنی

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} = \frac{1}{\cancel{E_i a^{-n}} r^n}\cancel{E_i a^{-n}}\, n r^{n-1} = \frac{n}{r} \qquad (3)$$

Year. Month. Data. Subject

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left(\frac{n}{r}+\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dr}+\left(\frac{1}{r}\frac{B}{A}\frac{n}{r}-\frac{1}{r^2}\right)u=0$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}+(n+1)\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\left(n\frac{B}{A}-1\right)\frac{1}{r^2}u=0 \quad (4)$$

$$r=e^{z} \rightarrow z=\ln r \quad (5)$$

$$\frac{du}{dr}=\frac{du}{dz}\frac{dz}{dr}=\frac{du}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)=e^{-z}\frac{du}{dz} \quad (6)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}\right)=\frac{d\left(\frac{du}{dr}\right)}{dr}=\frac{d\left(e^{-z}\frac{du}{dz}\right)}{dz}\frac{dz}{dr}$$

$$=\left(-e^{-z}\frac{du}{dz}+e^{-z}\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(e^{-z}\right)=e^{-2z}\frac{du}{dz}+e^{-2z}\frac{d^2u}{dz^2} \quad (7)$$

$(6),(7)\rightarrow(4)$: $\left(-e^{-2z}\frac{du}{dz}+\frac{e^{-2z}d^2u}{dz^2}\right)+(n+1)e^{-z}e^{-z}\frac{du}{dz}$

$$+\left(n\frac{B}{A}-1\right)e^{-2z}u=0$$

$$-\frac{du}{dz}+\frac{d^2u}{dz^2}+(n+1)\frac{du}{dz}+\left(n\frac{B}{A}-1\right)u=0$$

Year. Month. Data. Subject

$$\frac{d^2u}{dz^2} + n\frac{du}{dz} + \left(n\frac{B}{A}-1\right)u = 0 \quad 8$$

$$m^2 + nm + (nB-1) = 0$$

$$\Delta = n^2 - 4(nB-1)$$

$$\frac{B}{A} = \begin{cases} \nu & \text{Plaine stress} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \text{Plaine strian} \end{cases}$$

Plaine stress : $\Delta = n^2 - 4(n\nu - 1) = n^2 - 4\nu n + 4$

$ax^2 + bx^2 + c > 0$ $\quad a > 0$ $\quad a < 0$ $\quad a = 1$

$$\Delta' = 16\nu^2 - 16 = 16(\nu^2 - 1) = 16(\nu-1)(\nu+1) < 0$$

$< 0 \quad > 0$

$0 < \nu < .5$

plain strain $\quad \Delta = n^2 - 4\left(n\frac{\nu}{1-\nu} - 1\right) = n^2 - \frac{4\nu}{1-\nu}n + 4$

$$\Delta' = \frac{16\nu^2}{(1-\nu)^2} - 16 = 16\left(\frac{\nu^2}{(1-\nu)^2} - 1\right) = 16\left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1\right)\left(\frac{\nu}{1-\nu} + 1\right)$$

Year. Month. Data. Subject

$$= 16\left(\frac{2\upsilon - 1}{1-\upsilon}\right)\left(\frac{1}{1-\upsilon}\right)$$

<0 >0 >0

$0 < \upsilon < 0.5$

$a = 1 > 0$

بنابراین برای هر دو حالت تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای $\Delta > 0$ بنابراین:

دارای دو ریشه حقیقی است

$$m_1 = \frac{-n + \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{n - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-n - \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{n + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$u = c_1 e^{m_1 z} + c_2 e^{m_2 z} = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{du}{dr} = c_1 m_1 r^{m_1 - 1} + c_2 m_2 r^{m_2 - 1} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u}{r} = c_1 r^{m_1 - 1} + c_2 r^{m_2 - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A\varepsilon_{rr} + B\varepsilon_{\theta\theta}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = E\left(B\varepsilon_{rr} + A\varepsilon_{\theta\theta}\right) \end{cases}$$

Year. Month. Data. Subject

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(AC_1 m_1 r^{m_1-1} + AC_2 m_2 r^{m_2-1} + BC_1 r^{m_1-1} + BC_2 r^{m_2-1}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = E\left(BC_1 m_1 r^{m_1-1} + BC_2 m_2 r^{m_2-1} + AC_1 r^{m_1-1} + AC_2 r^{m_2-1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E(Am_1+B)\, C_1 r^{m_1-1} + E(Am_2+B) C_2 r^{m_2-1} \\ \sigma_{\theta\theta} = E(Bm_1+A)\, C_1 r^{m_1-1} + E(Bm_2+A) C_2 r^{m_2-1} \end{cases}$$

& $E = E_i a^{-n} r^{n}$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \underbrace{E_i a^{-n} C_1 (Am_1+B)}_{A_1^*} r^{m_1+n-1} + \underbrace{E_i a^{-n} C_2 (Am_2+B)}_{A_2^*} r^{m_2+n-1} \\ \sigma_{\theta\theta} = \underbrace{E_i a^{-n} C_1 (Bm_1+A)}_{B_1^*} r^{m_1+n-1} + \underbrace{E_i a^{-n} C_2 (Bm_2+A)}_{B_2^*} r^{m_2+n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A_1^* r^{m_1+n-1} + A_2^* r^{m_2+n-1} \\ \sigma_{\theta\theta} = B_1^* r^{m_1+n-1} + B_2^* r^{m_2+n-1} \end{cases}$$

Ex: یک مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از ماده مدرج تابعی (FGM)

دارای مشخصات هندسه‌ای، ماده‌ای و بارگذاری به صورت زیر است:

$a = 0.4\,m$, $b = 0.5\,m$ $\qquad E = 1250(10^9)\,r^{-2}$

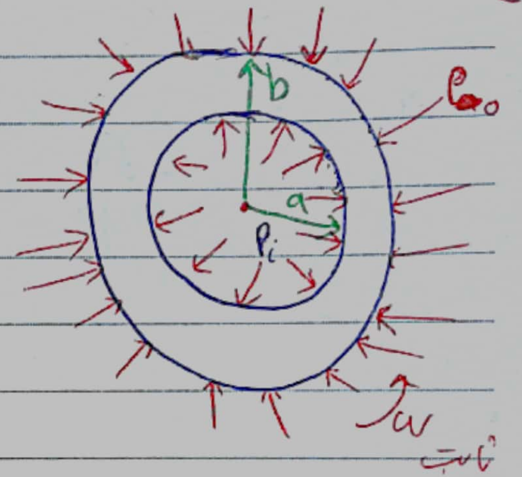
$\nu = 0.3$ $\qquad P_i = 30\,MPa$ $\qquad E = E_i\, a^{-n} r^{n}$

حالت کرنش صفحه‌ای

خواسته مسئله: $\sigma_{\theta\theta}\big|_{r=0.43m} = ?$

تحلیل الاستیک مخزن استوانه ای جدار ضخیم دوار FGM:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr}+\frac{1}{r}\right]\frac{du}{dr}+\left[\frac{1}{r}\overset{\nu^*}{\frac{B}{A}}\frac{1}{E}\frac{dE}{dr}-\frac{1}{r^2}\right]u=\frac{-\rho r\omega^2}{EA} \quad (1)$$



$$E=E_i\left(\frac{r}{a}\right)^{n_1}=E_i\,a^{-n_1}r^{n_1} \quad (2)$$

$$\rho=\rho_i\left(\frac{r}{a}\right)^{n_2}=\rho_i\,a^{-n_2}r^{n_2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dr}=\frac{n_1}{r}$$

$2,3,4 \longrightarrow (1)$

$$\frac{d^2u}{dr^2}+(n_1+1)\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+(n\nu^*-1)\frac{1}{r^2}u=\frac{\rho_i\,a^{-n_2}\omega^2}{E_i\,a^{-n_1}A}\times r^{n_1-n_2+1} \quad (5)$$

$$r=e^{z} \Rightarrow z=\ln r$$ رابطه کمکی

$$\frac{du}{dr}=\frac{du}{z}e^{-z} \quad (6) \qquad \& \qquad \frac{d^2u}{dr^2}=e^{-2z}\frac{du}{dz}+e^{-2z}\frac{d^2u}{dz^2} \quad (7)$$

697 → 5 : $e^{-2z}\frac{du}{dz} + e^{-2z}\frac{d^2u}{dz^2} + (n_1+1)e^{-z}\frac{du}{dz}e^{-z}$

$$+ (n\nu^*-1)e^{-2z}u = \frac{\rho_i a^{-n_1-n_2}}{E_i A}\omega^2 e^{z(n_1-n_2+1)}$$

$\times e^{2z}$:

$$-\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2} + (n_1+1)\frac{du}{dz} + (n\nu^*-1)u$$

$$= \frac{\rho_i a^{n_1-n_2}}{E_i A}\omega^2 e^{z(n_1-n_2+3)}$$

یادآوری :

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

همگن

$$y_p = -y_1\int \frac{y_2 f_3}{w}\,dx + y_2\int \frac{y_1 f_3}{w}\,dx$$

غیرهمگن

$$y = y_h + y_p$$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

آخرین معادله بدست آمده را مرتب می کنیم:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + n_1\frac{du}{dz} + (n\nu^* - 1)u = \underbrace{\frac{\rho_i\, a^{n_1-n_2}\,\omega^2}{E_i A}}_{A'}\, e^{z(n_1-n_2+3)}$$

برای این معادله یک حل همگن و یک حل ناهمگن داریم که حل همگن قبلاً انجام شده و حال برای

حالت ناهمگن معادله را طبق یادآوری حل می کنیم:

$$u_h = y_h = c_1 e^{m_1 z} + c_2 e^{m_2 z} = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2}$$

$$u_p = y_p = -e^{m_1 z}\int \frac{e^{m_2 z} A' e^{z(n_1-n_2+3)}}{\underbrace{(m_2-m_1)\, e^{(m_1+m_2)z}}_{W}}\, dz + e^{m_2 z}\int \frac{e^{m_1 z} A' e^{z(n_1-n_2+3)}}{(m_2-m_1)\, e^{(m_1+m_2)z}} \times dz$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{m_1 z} & e^{m_2 z} \\ m_1 e^{m_1 z} & m_2 e^{m_2 z} \end{vmatrix} = (m_2-m_1)\, e^{(m_1+m_2)z}$$

$$u_p = y_p = \frac{-e^{m_1 z} A'}{m_2-m_1}\int e^{z(n_1-n_2-m_1+3)}\, dz + \frac{e^{m_2 z} A'}{m_2-m_1}\int e^{z(n_1-n_2-m_2+3)}\, dz$$

$$u_p = -\frac{A'}{m_2-m_1}\, e^{m_1 z}\, \frac{e^{z(n_1-n_2-m_1+3)}}{n_1-n_2-m_1+3} + \frac{A'}{m_2-m_1}\, e^{m_2 z}\, \frac{e^{z(n_1-n_2-m_2+3)}}{n_1-n_2-m_2+3}$$

$$\boxed{e^{m_1 z} \times e^{-m_1 z} = 1}$$

$$y_p = -\frac{A'}{m_2-m_1}\left[\frac{e^{z(n_1-n_2+3)}}{n_1-n_2-m_1+3} - \frac{e^{z(n_1-n_2+3)}}{n_1-n_2-m_2+3}\right] = u_p$$

$$u_p = y_p = \frac{A'}{m_2-m_1}\, e^{z(n_1-n_2+3)}\left[\frac{m_1-m_2}{(n_1-n_2-m_1+3)(n_1-n_2-m_2+3)}\right]$$

$$u_p = \underbrace{\frac{A'}{(n_1-n_2-m_1+3)(n_1-n_2-m_2+3)}}_{c_3}\, r^{\overbrace{(n_1-n_2+3)}^{m_3}}$$

$$u = u_h + u_p$$

$$\boxed{u = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2} + c_3 r^{m_3}}$$

فقط c_1 و c_2 مجهول است

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{du}{dr} = c_1 m_1 r^{m_1-1} + c_2 m_2 r^{m_2-1} + c_3 m_3 r^{m_3-1} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u}{r} = c_1 r^{m_1-1} + c_2 r^{m_2-1} + c_3 r^{m_3-1} \end{cases}$$

Year. Month. Data. Subject

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A\,\varepsilon_{rr} + B\,\varepsilon_{\theta\theta}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = E\left(B\,\varepsilon_{rr} + A\,\varepsilon_{\theta\theta}\right) \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = E\left(A C_1 m_1 r^{m_1-1} + A C_2 m_2 r^{m_2-1} + A C_3 m_3 r^{m_3-1} + B C_1 r^{m_1-1} + B C_2 r^{m_2-1} + B C_3 r^{m_3-1}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = E\left(B C_1 m_1 r^{m_1-1} + B C_2 m_2 r^{m_2-1} + B C_3 m_3 r^{m_3-1} + A C_1 r^{m_1-1} + A C_2 r^{m_2-1} + A C_3 r^{m_3-1}\right)$$

$E_i a^{-n_1} r^{n_1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr} = E\left[(A m_1 + B) C_1 r^{m_1-1} + (A m_2 + B) C_2 r^{m_2-1} + (A m_3 + B) C_3 r^{m_3-1}\right] \\ \sigma_{\theta\theta} = E\left[(A + B m_1) C_1 r^{m_1-1} + (A + B m_2) C_2 r^{m_2-1} + (A + B m_3) C_3 r^{m_3-1}\right] \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = \underbrace{E_i a^{-n_1} (A m_1 + B) C_1}_{A_1^*} r^{m_1+n_1-1} + \underbrace{E_i a^{-n_1} (A m_2 + B) C_2}_{A_2^*} r^{m_2+n_1-1} + \underbrace{E_i a^{-n_1} (A_{3_3} + B) C_3}_{A_3^*} r^{m_3+n_2-1}$$

MENHAJ

Year. Month. Data. Subject

$$\sigma_{\theta\theta} = \underbrace{E_i\, a^{-n_1}(A+Bm_1)\, c_1}_{B_1^*} r^{m_1+n_1-1} + \underbrace{E_i\, a^{-n_1}(A_1+Bm_2)\, C_2}_{B_2^*} r^{m_2+n_1-1} + \underbrace{E_i\, a^{-n_1}(A+Bm_3)\, C_3}_{B_3^*} r^{m_3+n_1-1}$$

$$\sigma_{rr} = A_1^* r^{m_1+n_1-1} + A_2^* r^{m_2+n_1-1} + A_3^* r^{m_3+n_1-1}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = B_1^* r^{m_1+n_1-1} + B_2^* r^{m_2+n_1-1} + B_3^* r^{m_3+n_1-1}$$

Ex: یک مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم دوار ساخته شده از ماده مدرج تابعی (FGM) دارای مشخصات هندسی و مادهای و بارگذاری به صورت زیر است:

$a = 0.4m$ $b = 0.5$ $E = E_i\left(\frac{r}{a}\right)^{n_1} = E_i a^{-n_1} r^{n_1}$

$w = 100\ rad/s$ $\rho = \rho_i\left(\frac{r}{a}\right)^{n_2} = \rho_i a^{-n_2} r^{n_2}$

$E = 1250(10^9)\, r^{-2}$ $\nu = 0.3$

$\rho = 500\, r^{-3}$ $P_i = 30MPa$ حالت تنش صفحه‌ای

$u\big|_{r=0.45} = ?$

تحلیل الاستیک متقارن جدار ضخیم کروی FGM :

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr}+\frac{2}{r}\right]\frac{du}{dr}+\left[\frac{2}{r}\frac{B}{A}\frac{1}{E}\frac{dE}{dr}-\frac{2}{r^2}\right]u=0 \quad (1)$$

$$E=E_i\left(\frac{r}{a}\right)^n=E_i\,a^{-n}r^n \qquad \frac{1}{E}\frac{dE}{dr}=\frac{n}{r} \quad (2)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}+(n+2)\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+2(n\nu^*-1)\frac{1}{r^2}u=0 \quad (3)$$

$$r=e^z \Rightarrow z=\ln r \qquad \begin{cases}\dfrac{du}{dr}=e^{-z}\dfrac{du}{dz}\\[2mm] \dfrac{d^2u}{dr^2}=e^{-2z}\dfrac{d^2u}{dz^2}-e^{-2z}\dfrac{du}{dz}\end{cases} \quad (4)$$

$$\nu^*=\frac{B}{A}=\frac{\nu}{1-\nu}$$

$$(4)\rightarrow(3) \Rightarrow \left(e^{-2z}\frac{d^2u}{dz^2}-e^{-2z}\frac{du}{dz}\right)+(n+2)e^{-z}e^{-z}\frac{du}{dz}+2(n\nu^*-1)e^{-2z}u=0 \quad (5)$$

$$e^{-2z}\frac{d^2u}{dz^2}+(n+1)e^{-2z}\frac{du}{dz}+2(n\nu^*-1)e^{-2z}u=0 \quad (5)$$

Year. Month. Data. Subject

$\div e^{-2z}$:
$$\frac{d^2u}{dz^2} + (n+1)\frac{du}{dz} + 2(n\nu^+ - 1)u = 0$$

$$m^2 + (n+1)m + 2(n\nu^* - 1) = 0$$

$$\Delta = (n+1)^2 - (4)(2)(n\nu^* - 1) = n^2 + (2 - 8\nu^*)n + 9$$

$$ax^2 + bx^2 + c > 0 \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$$

$a = 1$ $\quad \Delta' = (2 - 8\nu^*)^2 - 36 = 4(1 - 4\nu^*)^2 - 36$

$$4\left[(1-4\nu^*) - 9\right] = 4(1 - 4\nu^* - 3)(1 - 4\nu^* + 3)$$

$$= -32(1 + 2\nu^*)(1 - \nu^*)$$

$$1 + 2\nu^* = 1 + \frac{2\nu^*}{1-\nu} = \frac{1+\nu}{1-\nu} > 0$$ $\quad 0 < \nu < 0.5$

$$m_1 = \frac{-(n+1) + \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{n+1 - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-(n+1) - \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{n+1 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$u = c_1 e^{m_1 z} + c_2 e^{m_2 z}$$

$$u = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{du}{dr} = c_1 m_1 r^{m_1-1} + c_2 m_2 r^{m_2-1} \\ \varepsilon_{\phi\phi} = \dfrac{u}{r} = c_1 r^{m_1-1} + c_2 r^{m_2-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A\varepsilon_{rr} + B\varepsilon_{\phi\phi}\right) \\ \sigma_{\phi\phi} = E\left(B\varepsilon_{rr} + A\varepsilon_{\phi\phi}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left[A c_1 m_1 r^{m_1-1} + A c_2 m_2 r^{m_2-1} + 2B c_1 r^{m_1-1} + 2B c_2 r^{m_2-1}\right] \\ \sigma_{\phi\phi} = E\left[B c_1 m_1 r^{m_1-1} + B c_2 m_2 r^{m_2-1} + (A+B) c_1 r^{m_1-1} + (A+B) c_2 r^{m_2-1}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = E\left(A m_1 + 2B\right) c_1 r^{m_1-1} + \left(A m_2 + 2B\right) c_2 r^{m_2-1} \\ \sigma_{\phi\phi} = E\left[\left(A + B(1+m_1)\right) c_1 r^{m_1-1} + \left(A + B(1+m_2)\right) c_2 r^{m_2-1}\right] \end{cases}$$

$$\sigma_{rr} = \underbrace{E_i a^{-n} (A m_1 + 2B) C_1}_{A_1^*} r^{m_1+n-1} + \underbrace{E_i a^{-n} (A m_2 + 2B) C_2}_{A_2^*} r^{m_2+n-1}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} = \overbrace{E_i a^{-n} \left[A + B(1+m_1) \right] C_1}^{B_1^*} r^{m_1+n-1} + \overbrace{E_i a^{-n} \left[A + B(1+m_2) \right] C_2}^{B_2^*} r^{m_2+n-1}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A_1^* r^{m_1+n-1} + A_2^* r^{m_2+n-1} \\ \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} = B_1^* r^{m_1+n-1} + B_2^* r^{m_2+n-1} \end{cases}$$

Ex:

یک مخزن کروی جدار ضخیم FGM به شعاع داخلی 20cm و شعاع خارجی 30cm تحت فشار داخلی 30MPa، فشار خارجی 10MPa قرار دارد. اگر رابطه مدول الاستیک به صورت $E=1250(10^{0})r^{-2}$ و مدول حاکم به صورت $E=E_i a^{-n} r^{n}$ باشد با فرض اینکه ضریب پواسون مقدار ثابت 0.33 داشته باشد مطلوبست مقادیر تنش شعاعی و تنش معادل ترسکا و تنش معادل فون میزز در شعاع 24cm را محاسبه کنید.

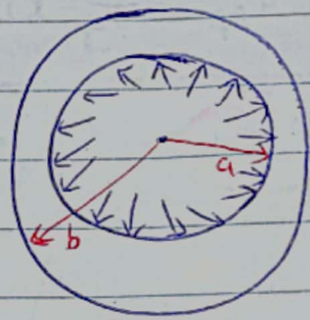
تحت فشار داخلی

تحلیل الاستوپلاستیک پلاستیک مخازن استوانه‌ای جدار ضخیم با استفاده از معیار ترسکا

دو معیار اساسی در طراحی سازه‌های ساخته شده از مواد نرم مورد توجه طراحان می‌باشد:

① معیار Von Mises

② معیار Tresca



از آن جایی که مخازن تحت فشار در ردیف سازه‌های خطرناک قرار دارد لذا برای ساخت آن‌ها از معیار ترسکا استفاده می‌گردد زیرا این معیار نسبت به فون میسز محافظه‌کارانه‌تر است.

معیار ترسکا: $\left| \sigma_{max} - \sigma_{min} \right| \geq \sigma_y$

$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} \geq \sigma_y$ تا تسلیم رخ ندهد

$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_y$ (1) برای آستانه تسلیم

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (3)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{\sigma_y}{r}$$

حالت پلاستیک

$$d\sigma_{rr} = \sigma_y \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{\sigma_{rr}^{p} = \sigma_y \ln r + K} \qquad (4)$$

(1),(4)

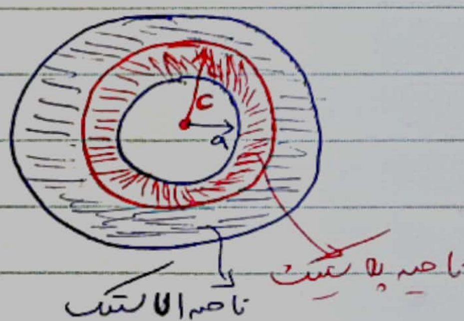
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \sigma_y$$

$$\boxed{\sigma_{\theta\theta}^{p} = \sigma_y (\ln r + 1) + K} \qquad (5)$$

روابط 4 و 5 برای بخش پلاستیک پوسته استوانه‌ای قابل استفاده است.

فرض نمایید تحت فشار داخلی P استوانه تا شعاع c وارد ناحیه پلاستیک شده است. حال سوال اینجاست که حداقل چه فشار داخلی لازم است که استوانه تا شعاع r=c وارد ناحیه پلاستیک شود.

از آن جایی که از شعاع r=a تا شعاع r=c پس می‌توانیم از معادلات زیر استفاده کنیم:



$$\left\{\begin{array}{ll}
\sigma_{rr}^{e} = A^* - \dfrac{B^*}{r^2} & (6)\\
\sigma_{\theta\theta}^{e} = A^* + \dfrac{B^*}{r^2} & (7)\\
\sigma_{rr}^{p} = \sigma_y \ln r + K & (8)\\
\sigma_{rr}^{p} = \sigma_y (\ln r + 1) + K & (9)
\end{array}\right.$$

Year. Month. Data. Subject

$$\sigma_{rr}^{p}\Big|_{r=a} = -P \Rightarrow \sigma_y \ln a + K = -P \qquad (10)$$

$$\sigma_{rr}^{e}\Big|_{r=b} = 0 \qquad A^* - \frac{B^*}{b^2} = 0 \qquad (11)$$

به دلیل شرایط پیوستگی تنش ها در $r=c$

$$\sigma_{rr}^{e}\Big|_{r=c} = \sigma_{rr}^{p}\Big|_{r=c} \Rightarrow A^* - \frac{B^*}{c^2} = \sigma_y \ln c + K \qquad (12)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{e}\Big|_{r=c} = \sigma_{\theta\theta}^{p}\Big|_{r=c} \Rightarrow A^* + \frac{B^*}{c^2} = \sigma_y(\ln c + 1) + K \qquad (13)$$

(12) + (13)
$$2A^* = \sigma_y(2\ln c + 1) + 2K$$

$$\boxed{A^* = \sigma_y\left(\ln c + \frac{1}{2}\right) + K} \qquad (14)$$

(12), (14)
$$\sigma_y\left(\ln c + \frac{1}{2}\right) + K - \frac{B^*}{c^2} = \sigma_y \ln c + K$$

$$\frac{B^*}{c^2} = \frac{\sigma_y}{2} \qquad \boxed{B^* = \sigma_y \frac{c^2}{2}} \qquad (15)$$

(14), (15) $\rightarrow$ (11) : $\sigma_y\left(\ln c + \frac{1}{2}\right) + K - \frac{\sigma_y c^2}{2b^2} = 0$

$$\boxed{K = \sigma_y\left(\frac{c^2}{2b^2} - \ln c - \frac{1}{2}\right)} \quad (16)$$

(16) $\rightarrow$ (10) $\quad \sigma_y \ln a + \sigma_y\left(\frac{c^2}{2b^2} - \ln c - \frac{1}{2}\right) = -P$

$$P_c = \sigma_y\left(\ln c - \ln a - \frac{c^2}{2b^2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{P_c = \sigma_y\left[\ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{b^2 - c^2}{2b^2}\right]}$$

- حداقل فشار داخلی لازم برای اینکه استوانه تا شعاع $r=c$ وارد ناحیه پلاستیک شود.

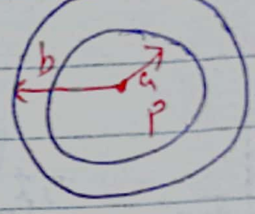
■ حداقل فشار داخلی لازم برای اینکه استوانه تسلیم شروع شود:

$c \rightarrow a$

$$\boxed{P_a = \sigma_y\left(\frac{b^2 - a^2}{2b^2}\right)}$$

تحلیل الاستوپلاستیک مخازن جدار ضخیم کروی تحت فشار داخلی :

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} < \sigma_y$$ معیار ترسکا :



$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \pm\sigma_y$$ برای شروع تسلیم

با توجه به مثال بخش تحلیل الاستیک کره

جدار ضخیم در ~~b>1.587a~~

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \sigma_y \qquad (1)$$

شعاع $r=a$ هم $\sigma_{\varphi\varphi}$ و هم σ_{rr} مقدار ماکزیمم خود را دارند

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) = 0 \qquad (2)$$

و در عین حال در شعاع $r=a$ شرایط زیر برقرار است

$$1,2 \rightarrow \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{\pm 2\sigma_y}{r}$$

$\sigma_{max} = \sigma_{\varphi\varphi}$ $\quad b<1.587a$

$\sigma_{max} = \sigma_{rr}$ $\quad b>1.587a$

بنابراین $\sigma_{max} = \pm\sigma_y$

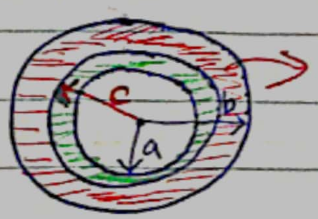
$$\boxed{\sigma_{rr}^{p} = \pm 2\sigma_y \ln r + k} \qquad (3)$$

$$3 \rightarrow 1 \qquad \boxed{\sigma_{\varphi\varphi}^{p} = \pm\sigma_y\left(2\ln r + 1\right) + k} \qquad (4)$$

حداقل فشار لازم برای اینکه مخزن کروی تا شعاع $r=c$ پلاستیک شود

(ضخامت تیکا)

$$\text{if}\begin{cases} + \Rightarrow \sigma_{max} = \sigma_{\varphi\varphi} \\ - \Rightarrow \sigma_{max} = \sigma_{rr} \end{cases}$$



ناحیه الاستیک

Year. Month. Data. Subject

$$\sigma_{rr}^{p}\Big|_{r=a} = -P \quad (5) \qquad \& \qquad \sigma_{rr}^{e}\Big|_{r=b} = 0 \quad (6)$$

$$\sigma_{rr}^{e}\Big|_{r=c} = \sigma_{rr}^{p}\Big|_{r=c} \quad (7)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{e}\Big|_{r=c} = \sigma_{\varphi\varphi}^{p}\Big|_{r=c} \quad (8)$$

(3), (5) $\rightarrow$ $\pm\sigma_y (2\ln a) + K = -P$ (9)

$\hookrightarrow$ (6) $A^* - \dfrac{B^*}{b^3} = 0$ (10)

(7) $\hookrightarrow$ $A^* - \dfrac{B^*}{c^3} = \pm 2\sigma_y \ln c + K$ (11)

(8) $\hookrightarrow$ $A^* + \dfrac{B^*}{2c^3} = \pm\sigma_y (2\ln c + 1) + K$ (12)

(12)-(11) $\dfrac{3B^*}{2c^3} = \pm\sigma_y \Rightarrow \boxed{B^* = \pm\dfrac{2c^3}{3}\sigma_y}$ (13)

(11), (13) $\boxed{A^* = \pm\dfrac{2\sigma_y}{3} \pm 2\sigma_y \ln c + K}$ (14)

(13), (14) $\Rightarrow$ (10) $\pm\dfrac{2\sigma_y}{3} \pm 2\sigma_y \ln c + K \mp \dfrac{2c^3}{3b^3}\sigma_y = 0$

$$\boxed{K = \mp \frac{2\sigma_y}{3b^3}\left(b^3 - c^3\right) \mp 2\sigma_y \ln c} \quad (15)$$

$$(15) \rightarrow (9) \quad \pm 2\sigma_y \ln a \mp \frac{2\sigma_y}{3b^3}\left(b^3 - c^3\right) \mp 2\sigma_y \ln c = -P$$

$$\boxed{P_c = \pm 2\sigma_y \ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{2\sigma_y}{3b^3}\left(c^3 - b^3\right)} \Rightarrow P = \mp 2\sigma_y \ln a \pm \frac{2\sigma_y}{3b^3}\left(b^3 - c^3\right) \pm 2\sigma_y \ln c$$

حداقل فشار لازم برای اینکه مخزن کروی تا شعاع $r=c$ وارد ناحیه پلاستیک شود.

حداقل فشار لازم برای اینکه مخزن کروی وارد ناحیه پلاستیک شود:

$c \rightarrow a$

$$\boxed{P_a = \pm \frac{2\sigma_y}{3b^3}\left(b^3 - a^3\right)}$$

حداقل فشار لازم برای اینکه کل مخزن پلاستیک شود:

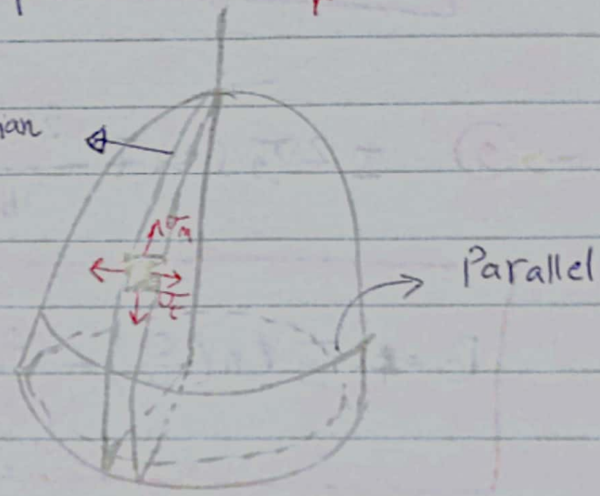
$c \rightarrow b$

$$\boxed{P_b = \mp 2\sigma_y \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

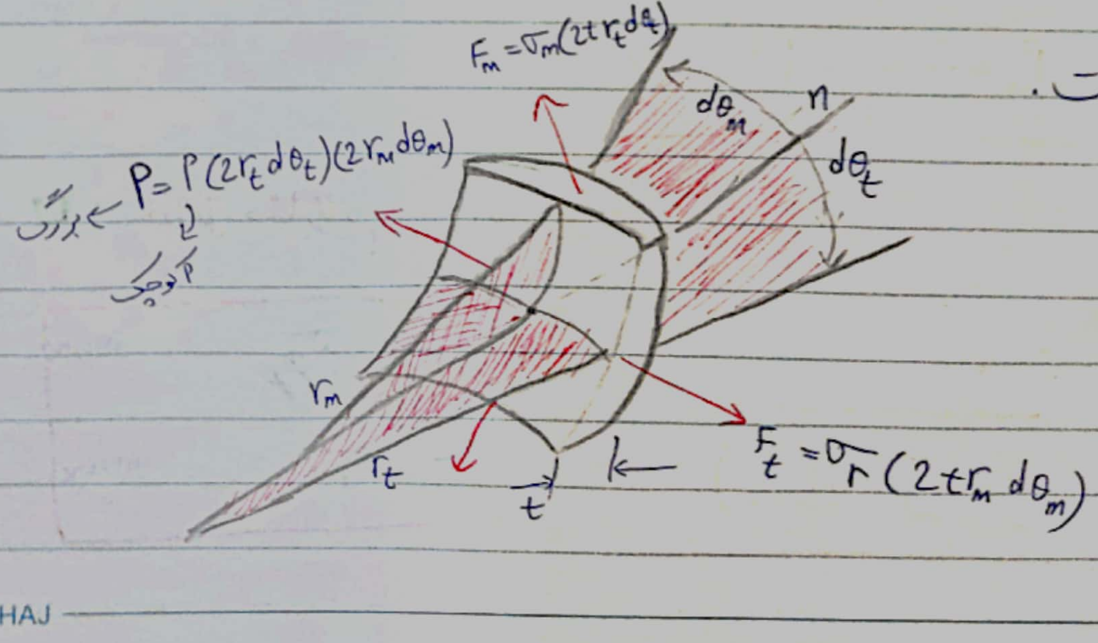
$+$	$\sigma_{\varphi\varphi}$	max
$-$	σ_{rr}	max

مخازن تحت فشار جدار نازک:

باید $\dfrac{\text{نسبت ضخامت}}{\text{شعاع داخلی}} < 0.1$ $\qquad \dfrac{t}{r} < 0.1$



المان نشان داده شده در شکل به گونه ای انتخاب گردیده است که نرمال های وجوه آن در امتداد نصف النهاری (meridian) و مماسی (tangential) می باشد از تنش شعاعی در مقایسه با تنش های مماسی و نصف النهاری در مخازن جدار نازک صرف نظر می گردد از تنش های برشی روی المان نشان داده شده به دلیل تقارن از لحاظ هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی صرف نظر گردیده است.



Year. Month. Data. Subject

نیرو ← $P - 2F_m \sin d\theta_m - 2F_t \sin d\theta_t = 0$

فشار داخلی ← $P(2r_t d\theta_t)(2r_m d\theta_m) = 2\sigma_m(2tr_t d\theta_t)\sin d\theta_m + 2\sigma_t(2tr_m d\theta_m) \times \sin d\theta_t$

قسمت جدار نازک استاد پیوست فرستادن