کنترل خطی:

جلسه اول:

تعریف تبدیل لاپلاس:

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$$ بفرض $f(t)=0 \quad \forall t<0$

$$\left|f(t)\,e^{-\delta t}\right|<\infty \qquad \delta = Re\{s\}$$ ، متغیر مختلط $s=\delta+j\omega$

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های مهم

$$f(t)=\delta(t) \longrightarrow F(s)=1$$

$$f(t)=u(t) \longrightarrow F(s)=\frac{1}{s}$$

$$f(t)=r(t)=t\,u(t) \longrightarrow F(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$f(t)=\frac{t^2}{2}u(t)=a(t) \longrightarrow F(s)=\frac{1}{s^3}$$

$$f(t)=\sin\omega t\,.\,u(t) \longrightarrow F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\sin\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{j2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=F(s)=\frac{\overbrace{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0}^{N(s)}}{\underbrace{s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0}_{D(s)}}\,\overbrace{e^{-s\tau}}^{Delay}$$

تابع تبدیل سیستم

مرتبه تابع تبدیل را مرتبه سیستم order

مرتبه برای سیستم‌های تأخیردار تعریف می‌شود برابر چه است.

مثال $F(S) = \dfrac{(S+1)(S+2)}{S(S+4)^2(S^2+4S+5)(S+3)}$ → $(S+2)^2+1$

قطبهای محدود

$S = -1, -2$ صفرهای محدود $\qquad S = 0, -4, -4, -3, -2 \pm j$

$S = -\alpha \pm j\beta$

$(S+\alpha)^2 + \beta^2 = 0 \longrightarrow S^2 + 2\alpha S + \alpha^2 + \beta^2 = 0$

$(S+\alpha)^2 = -\beta^2 = \beta^2 j^2$

$S + \alpha = \pm j\beta$

$\lim\limits_{S \to S_0} F(S) = 0$ تعریف صفر $\qquad \lim\limits_{S \to S_0} F(S) = \infty$ تعریف قطب

strictly proper: $n-m$: صفرها در بی‌نهایت

Improper: $m-n$: قطب‌ها در بی‌نهایت

proper: all polse & zeros are finite

$$F(S) = \frac{b_m S^m + \cdots + b_1 S + b_0}{S^n + \cdots + a_1 S + a_0} = \frac{C(S)}{R(S)}$$

$\dfrac{b_0}{a_0}$ = DC بهره‌ی $\qquad$ اگر بهره‌ی DC برابر صفر باشد، صفر در مبدأ داریم.

صفر و قطب متقارن تقریب تأخیری باشد نسبت به محور $j\omega$.

$$S = j\omega \longrightarrow \frac{1-\frac{T_d}{2}j\omega}{1+\frac{T_d}{2}j\omega}$$

phase filter

All pass filter

$$\left|e^{-T_d j\omega}\right| = \frac{\sqrt{1+\frac{T_d^2}{4}\omega^2}}{\sqrt{1+\frac{T_d^2}{4}\omega^2}}$$

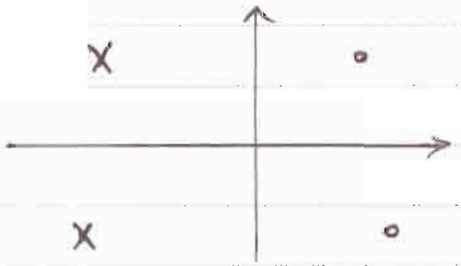
تقریب تأخیر

$$\measuredangle e^{-T_d j\omega} = -\tan^{-1}\frac{T_d\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{T_d\omega}{2} = -2\tan^{-1}\frac{T_d\omega}{2}$$

تأخیر فاز منفی به سیستم می‌دهد.

$$A\sin\omega_1 t \longrightarrow \boxed{A.P.F} \longrightarrow A\sin(\omega_1 t-\varphi)$$

تقریب پاده مرتبه دوم:



3) شیفت در حوزه فرکانس:

$$f(t) \longrightarrow F(s)$$

$$e^{at}f(t) \longrightarrow F(s-a)$$

4) مشتق‌گیری در زمان:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

۱۱۰ قضیه مقدار اولیه و قضیه مقدار نهایی:
I.V.T — F.V.T

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \underbrace{f_{ss}}_{\text{steady state}} = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$F_1(s) = \dfrac{1}{s+1}$

اول: $f_1(t) = e^{-t}u(t)$ → $f_1(0^+) = 1$, $f_1(\infty) = 0$

دوم: $f_1(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF_1(s) = \lim \dfrac{s}{s+1} = 1$

$f_1(\infty) = \lim_{s\to 0} sF_1(s) = \lim_{s\to 0} \dfrac{s}{s+1} = 0$

$F_2(s) = \dfrac{1}{s-1}$

اول: $f_2(t) = e^{t}u(t)$ → $f_2(0^+) = 1$, $f_2(\infty) = \infty$

دوم: $f_2(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF_2(s) = \lim_{s\to\infty} \dfrac{s}{s-1} = 1$

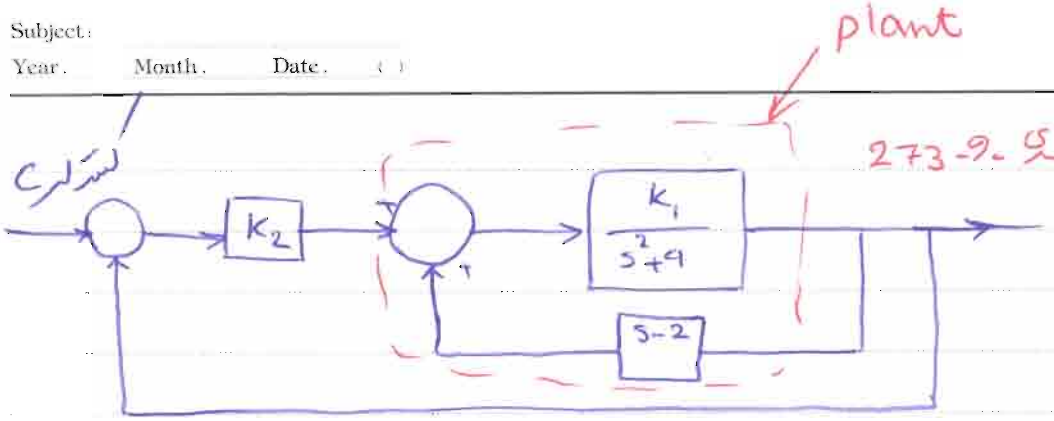
$f_2(\infty) = \lim_{s\to 0} sF_2(s) = \lim_{s\to 0} \dfrac{s}{s-1} = 0$

$f_{ss} \to \infty$ ، F.V.T صادق نیست

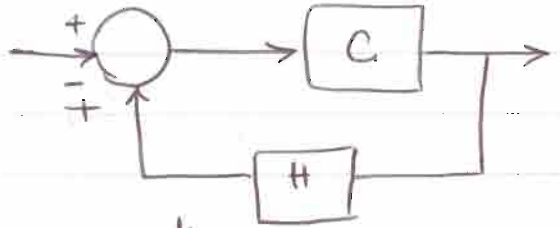
اگر $F(s)$ قطب در سمت راست باز داشت.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال امتحانی 273-۹۰

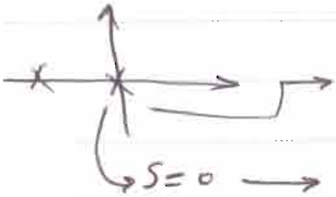


k_1 چنان طراحی شده که plant اصلی در مرز پایداری قرار گرفته است مقادیر صحیح به ازای k_2؟



$$= \frac{C}{1 \pm CH}$$

$$T(s)_{\text{plant}} = \frac{\frac{k_1}{s^2+4}}{1 \mp \frac{k_1}{s^2+4}(s-2)} = \frac{k_1}{s^2+4-k_1(s-2)} = \frac{k_1}{s^2-k_1 s+4+2k_1}$$



→ تعریف مرز پایداری ← فقط یک قطب در مبدأ تقریباً سمت چپ

$s=0 \longrightarrow k_1 = -2$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+\alpha s+\beta} \longrightarrow \alpha = 0,\ \beta > 0 \longrightarrow s = \pm j\sqrt{\beta}$$

$$\beta = 0,\ \alpha > 0$$

$$F(s) = \frac{s+2}{s+1} = \frac{s+1+1}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1} \rightarrow f(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

$$f(0^+) = 0+1 = \boxed{1}$$

$$f(\infty) = \boxed{0}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت اول: ریشه‌های D(s) ساده باشند:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$F(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

$$c_1 = \frac{N(s)}{D'(s)}\Bigg|_{s=p_1}$$

مثال $$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{\overset{N(s)}{-1}}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$f(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-3t})$$

$$D(s) = s^2 + 5s + 6 \longrightarrow D'(s) = 2s+5$$

حالت دوم: ریشه‌های D(s) تکراری باشند

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{c_1}{s+2} + \frac{c_2}{(s+2)^2} + \frac{c_3}{s+3}$$

مثال

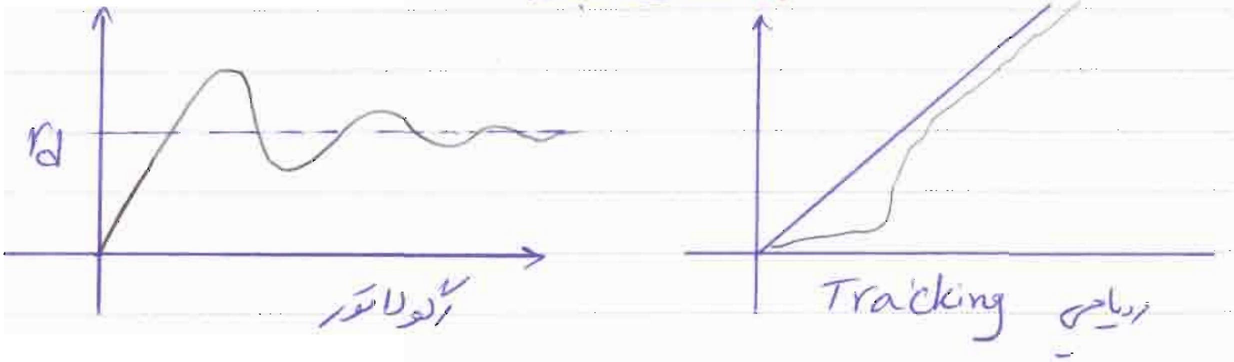
$$c_1 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{d^{2-1}}\left(\frac{1}{s+3}\right)\Bigg|_{s=-2}$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s+2}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{(s+1)^3} + \frac{c_4}{s+2}$$

جلسه دوم

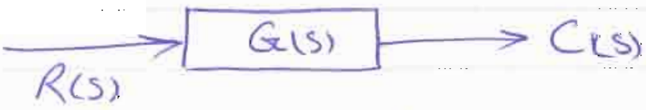
هدف کنترل ، ردیابی یک ورودی مطلوب با برقرار کردن پایداری و حذف اغتشاشات و عدم قطعیتها است.

سیستم های کنترل :
۱- حلقه باز
۲- حلقه بسته



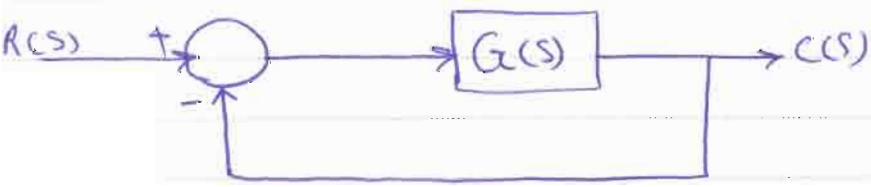
$$G(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \frac{1}{RCs+1}$$

سیستم های حلقه باز (open loop):



$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s)$$

سیستم های حلقه بسته (close loop): سیستم فیدبک دار ـ سیستم با سنسور



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$T_{OL}(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \rightarrow \begin{cases} A(s) = 0 & \text{صفر حلقه باز} \\ B(s) = 0 & \text{قطب حلقه باز} \end{cases}$$

فقط در حالت فیدبک unity صفر حلقه بسته با صفر حلقه باز برابر است.

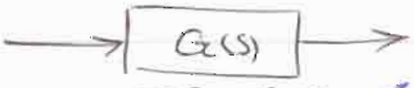
2) اثر بر روی پایداری:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)} \xrightarrow{\text{فیدبک منفی}} \quad \left. \begin{aligned} G(s) &= \frac{-1}{s+2} \\ H(s) &= s+2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{مخرج} = 0$$

$\rightarrow GH = \pm 1$ ناپایدار

3) اثر بر روی حساسیت: sensitivity

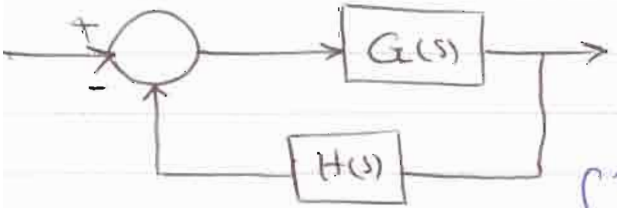
$$S_\alpha^T = \frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta \alpha}{\alpha}} = \frac{\frac{\partial T}{T}}{\frac{\partial \alpha}{\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{T} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \alpha}$$



$T(S) = G(S)$

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \times \frac{G}{T} = 1 \times \frac{C}{C} = 1$$

به دلیل اینکه $T(S) = G(S)$ رابطه مستقیم دارد حساسیت نسبت به ان پارامتر ۱ می‌شود



$$T(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)}$$

$$S_G^T = \frac{1 + GH - GH}{(1+GH)^2} \times \frac{G}{\frac{G}{1+GH}} = \boxed{\frac{1}{1+GH}}$$

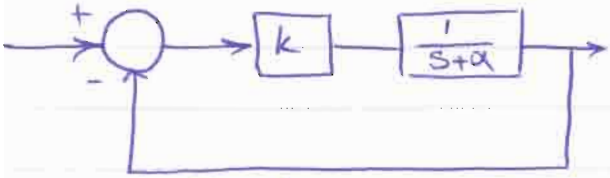
به خاطر عددی که کلو تقسیم شد حساسیت هم تقسیم شد

اگر به پسخور خیلی حساس باشد به پیشخور خیلی حساس نیست و بالعکس.

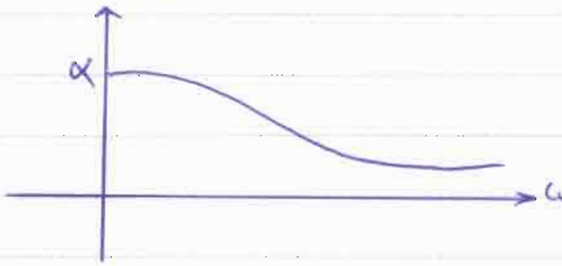
نکته: حساسیت تابع s فرکانس می‌باشد.

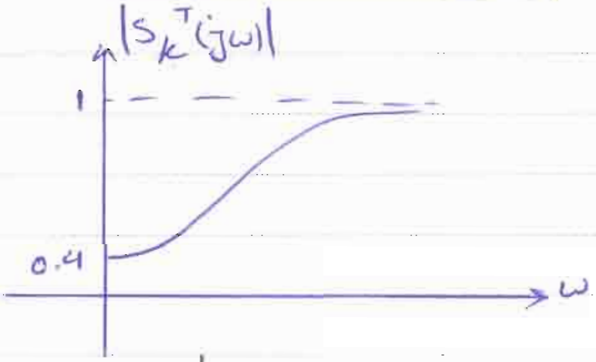
$$S_\alpha^T = F(s) \xrightarrow{s=j\omega} F(j\omega) \to |F(j\omega)|, \quad \angle F(j\omega)$$

۲۰۱ - اتوماسیون 88 :



k و α را چنان بیابید که $|S_\alpha^T(j\omega)|$





$$T(s) = \frac{k}{s+\alpha+k}$$

$$S_k^T = \frac{s+\alpha+k-k}{(s+\alpha+k)^2} \times \frac{k}{\frac{k}{s+\alpha+k}} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha+k)} \xrightarrow{s \neq 0} \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha+k} = 0.4 \\ |S_k^T(j\omega)| = 0.4 \end{cases}$$

$$S_\alpha^T = \frac{-k}{(s+\alpha+k)^2} \times \frac{\alpha}{\frac{k}{s+\alpha+k}} = \frac{-\alpha}{s+\alpha+k} \xrightarrow{s=0} \frac{\alpha}{\alpha+k} = \alpha$$

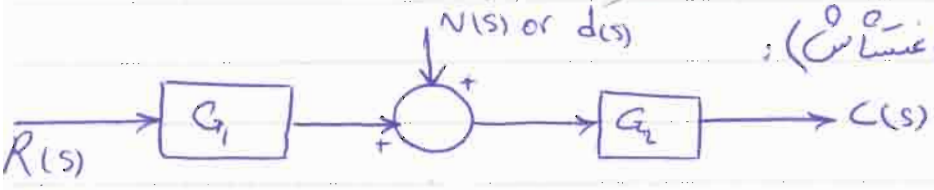
$$\alpha = 0.4$$
$$k = 0.6$$

PAPCO

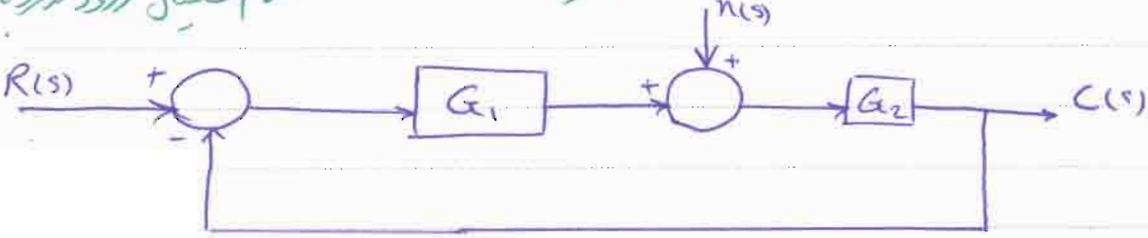
$$S_{\tau}^{T} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \times \frac{\tau}{T} = \frac{-s e^{-\tau s}(s+1+e^{-\tau s}) + s e^{-2\tau s}}{(s+1+e^{-\tau s})^2} \times \frac{\tau(s+1+e^{-\tau s})}{e^{-\tau s}}$$

$$= \frac{\cancel{s e^{-\tau s}}(e^{-\tau s} - s - 1 - e^{-\tau s})}{(s+1+e^{-\tau s})} \times \frac{\tau}{\cancel{e^{-\tau s}}} = \frac{\tau s(\cancel{e^{-\tau s}} - s - 1 - \cancel{e^{-\tau s}})}{s+1+e^{-\tau s}}$$

۴) اثر بر روی نویز (اغتشاش):



$$C = \underbrace{G_1 G_2 R}_{\text{سهم سیگنال ورودی در خروجی}} + \underbrace{G_2 n}_{\text{سهم نویز در خروجی}} \rightarrow \frac{S}{N} = \frac{G_1 G_2 R}{G_2 n} = G_1 \frac{R}{n}$$

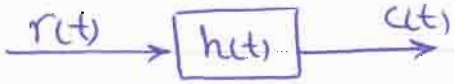


$$C = \frac{G_1 G_2}{1+G_1 G_2} r + \frac{G_2}{1+G_1 G_2} n \qquad S/N = G_1 \, r/n$$

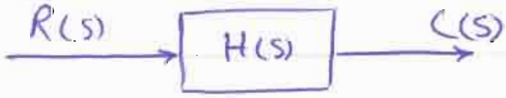
پس فیدبک تاثیری در S/N ندارد.

انواع نمایش سیستمهای LTI : هدف ما در این درس کنترل سیستمهای LTI : SISO است

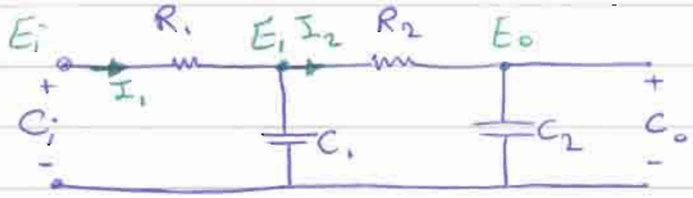
۱) نمایش با پاسخ ضربه: $c(t) = h(t) * r(t)$



۲) نمایش تابع تبدیل

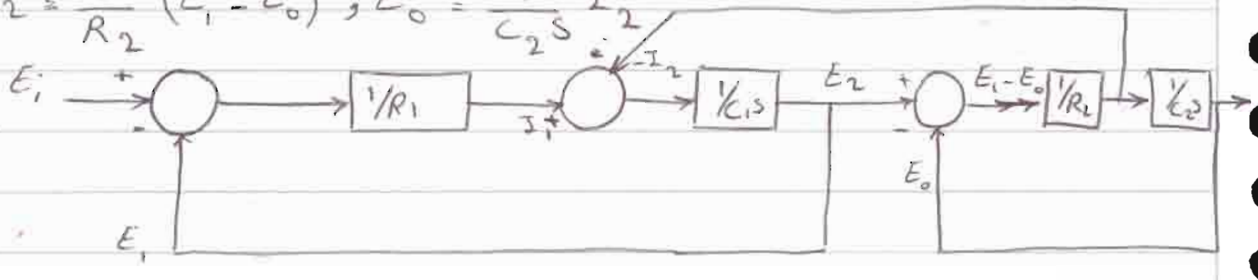


سؤال 59 : سراسری 85 :

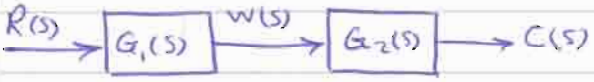


$$I_1 = \frac{1}{R_1}(E_i - E_1) \ , \ E_1 = \frac{1}{C_1 S}(I_1 - I_2)$$

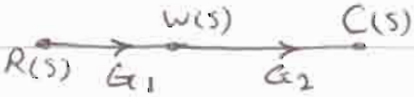
$$I_2 = \frac{1}{R_2}(E_1 - E_o) \ , \ E_o = \frac{1}{C_2 S} I_2$$



۴) نمایش بلوکی : (اتصال پشت سرهم)

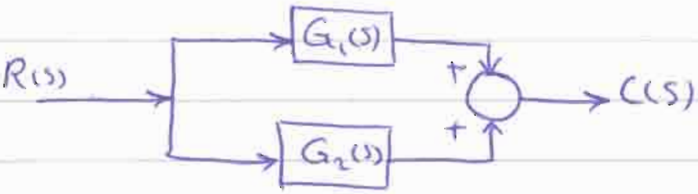


$$T(S) = G_1(S)\, G_2(S)$$

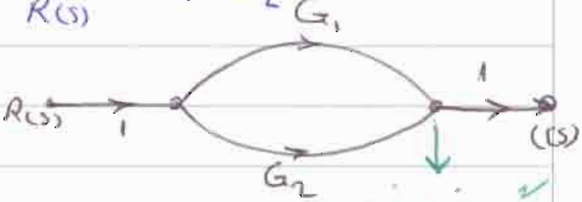


SFG Signal flow graph

(اتصال موازی) :



$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1 + G_2$$



دو خروجی پشت جمع کن را
شاخه ای که ارزش دارد شده است

اتصال فیدبک :

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

۴) مخرج تابع تبدیل حلقه بسته

$$D(s) = 1 - (L_1 + L_2 + \dots) + (L_1 L_2 + L_1 L_3 + \dots) - (L_1 L_2 L_3 + \dots)$$

مجموع بهره حلقه‌های سیستم — مجموع حاصلضرب بهره حلقه‌های دو به دو مجزا — مجموع حاصلضرب بهره حلقه‌های سه به سه مجزا

Δ_i: کوفاکتوری است که از حذف مسیر i ام بدست آمده است:

$$L_1 = -G_2 H_2$$

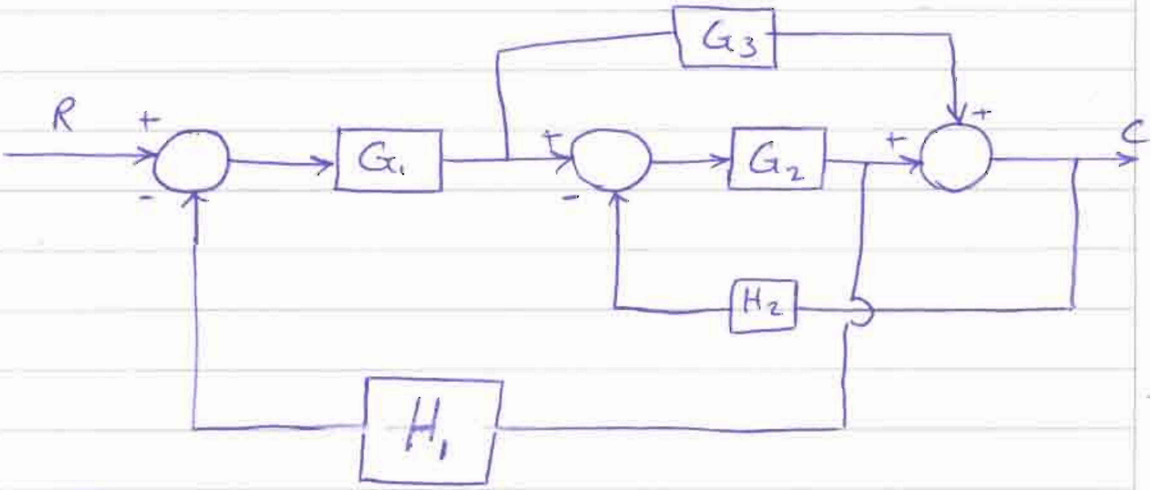
$$L_2 = -G_1 H_1$$

$$L_3 = -G_3 H_1$$

$$\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = 1 \qquad ?$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 + G_3 G_2}{1 - (-G_1 H_1 - G_2 H_2 - G_3 H_1)}$$

برق ۹۰ - سوال 265:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = ?$$

Year Month Date ( )

$L_1 = (4)(-1) = -4$

$L_2 = (5)(-2) = -10$

$L_3 = (1)(-2)(8)(-1) = 16$

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1(1-L_2)+P_2(1-L_1)+P_3+P_4+P_5+P_6}{1-(L_1+L_2+L_3)+(L_1L_2)} = \boxed{\frac{851}{39}}$$

$P_1 = (1)(2)(4)(6)(1)$

$P_2 = (3)(5)(7)(1)$

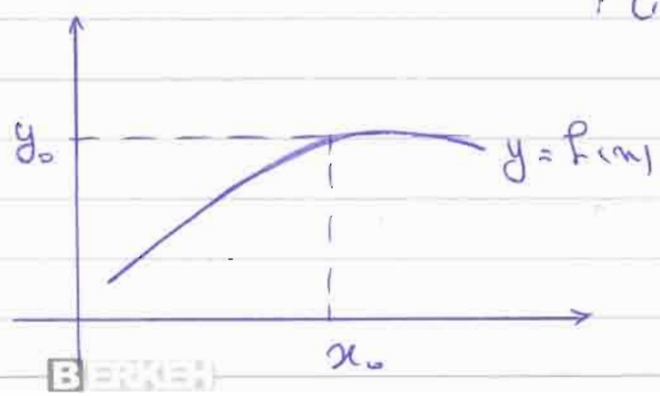
$P_3 = (1)(3)(8)(6)(1)$

$P_4 = (1)(2)(1)(7)(1)$

$P_5 = (1)(2)(1)(-2)(8)(6)(4)$

$P_6 = (1)(3)(8)(-1)(1)(7)(1)$

خطی سازی : Linear Zation :



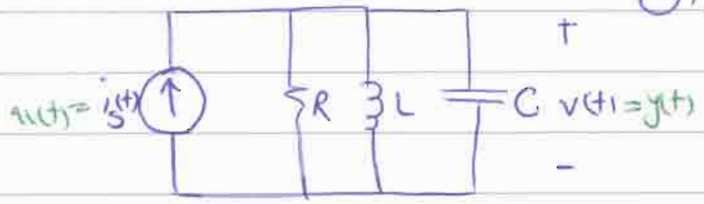
BERKEH

Year. Month. Date. ( )

جلسه سوم (کنترل)

مراحل مدل‌سازی یک سیستم: (سیستم الکتریکی)

قدم اول: تعریف سیستم و ورودی خروجی آن



در اینجا ورودی و خروجی را انتخاب کردیم

از منبع جریان و ولتاژ خازن استفاده کردیم.

قدم دوم: تعریف متغیرهای اصلی ← متغیر عرضی: متغیری که باید برای اندازه‌گیری آن از دو سر استفاده کرد (مثل ولتاژ) (مثل سرعت)

متغیر عبوری: متغیری است که جاری می‌شود مثل جریان

قدم سوم: تعریف عناصر اصلی: ۱- عنصر هدر دهنده انرژی: عنصری که انرژی مطلوب به انرژی غیرمطلوب تبدیل می‌کند مثل مقاومت و اصطکاک

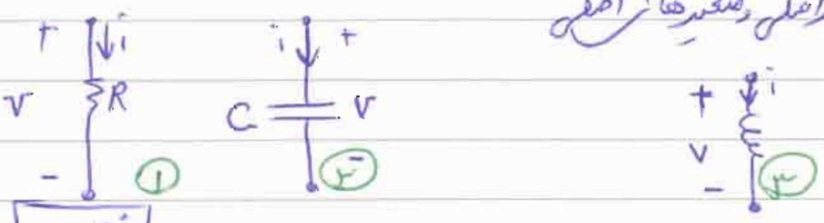
۲- عنصر ذخیره کننده انرژی: ۱- نوع ۱E: انرژی ذخیره شده با متغیر عرضی رابطه دارد = $E=\frac{1}{2}Cv^2$

۲- نوع ۲E: " " " متغیر عبوری " " $E=\frac{1}{2}i^2L$

در سیستم‌های الکتریکی خازن است که با انرژی ذخیره شده (ولتاژ) رابطه دارد و ولتاژ متغیر عرضی است.

در مکانیک هر عنصری که این رابطه را داشته باشد خازن می‌بینیم مثل جرم: $E=\frac{1}{2}m\underline{v}^2$

قدم چهارم: ارتباط بین عناصر اصلی و متغیرهای اصلی



$\boxed{v=Ri}$

قدم پنجم: نوشتن قدم فیزیکی: KVL KCL

برای مدار فوق KCL می‌نویسیم:

$$-i_s(t)+\frac{1}{R}v(t)+C\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}\int v\,dt=0$$

قانون فیزیکی آن را نوشتیم. در ریاضیات به این: معادلات مشتق - انتگرالی می‌گویند.

هسته مشتق شدن معادله مشکل حل نمی‌کند

$$3y''-2\underbrace{\int y(\tau)e^{-(t-\tau)}}_{①}d\tau+y=0$$

برای حل راحت به ① می‌توان از انتگرال کانولوشن استفاده کرد

ادامه: یک بار مشتق می‌گیریم؛ به جای منبع جریان x و ولتاژ y می‌گذاریم

$$\rightarrow\quad -\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{R}\frac{dy(t)}{dt}+C\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{L}y=0$$

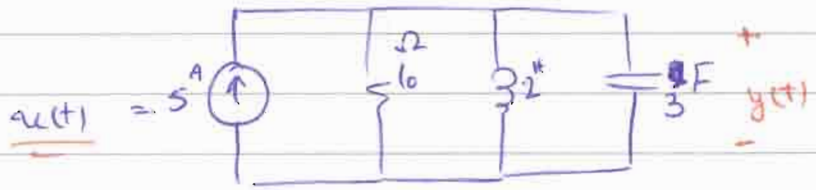
$$\xrightarrow{\ \mathcal{L}\ } \Rightarrow -Sx(S)+\frac{1}{R}Sy(S)+CS^2y(S)+\frac{1}{L}y(S)=0$$

$$\rightarrow T(S)=\frac{y(S)}{x(S)}=\frac{S}{CS^2+\frac{1}{R}S+\frac{1}{L}}$$

معادله دیفرانسیل یک سیستم معادله دینامیکی آن سیستم است.

(مهم): درحال حاضر داریم مدل سازی سیستم‌های LTI را انجام می‌دهیم.

مثال ۱



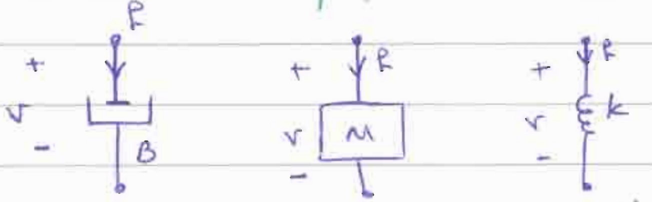
BERKEH

قدم دوم: متغیرهای اصلی ← ۱) عرضی: سرعت v

۲) عبوری: نیرو f

اصطکاک   جرم   فنر

قدم سوم: عناصر اصلی:



$v = L \frac{di}{dt}$ (۳)

$V = \frac{1}{B} f \qquad v = \frac{1}{m} \int f \qquad v = \frac{1}{k} \frac{df}{dt}$

$f = B v$ (1) $\qquad f = m \frac{dv}{dt}$ (۲) $\qquad f = k \int v \, dt$

$i = \frac{1}{R} v \qquad i = C \frac{dv}{dt}$

(۱) ← یعنی هر جا اصطکاک دیدیم به جایش عکس مقاومت بگذاریم.

(۲) ← " " جرم " به جایش خازن می‌گذاریم.

(۳) ← " " فنر دیدیم " عکس سلف " ".

نوع (۱)

$E = \frac{1}{2} C v^2 , E = \frac{1}{2} m v^2$ درست، معادل انرژی: برای متغیرهای مشابه

نوع (۲)

$E = \frac{1}{2} L i^2 , E = \frac{1}{2k} f^2$

قدم چهارم: نوشتن قوانین فیزیکی: $\Sigma f = ma$

$f(t) - f_k - f_B = ma$

ma = نیروهای مقاوم − نیروهای مؤثر

① و ② ⟵ به جدولی که شامل ستون‌ها ۱ و ۲ است جدول نیرو–جریان (سرعت–ولتاژ) می‌گویند

① و ③ ⟵ به جدولی که " " ۲ و ۳ " " سرعت–جریان (نیرو–ولتاژ) "

رسم مدار الکتریکی معادل یک سیستم مکانیکی طولی: به ازای هر جرم یک خازن به زمین می‌بندیم و

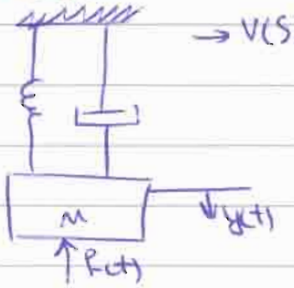
سرعت آن جرم ولتاژ خازن است.

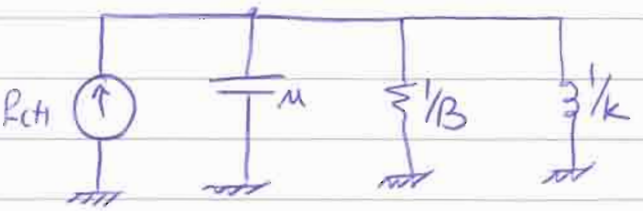
نیرو–جریان

$y(t) = \frac{dv}{dt}$

$\rightarrow V(S) = S\,Y(S)$

$S\,Y(S)$ سرعت–ولتاژ



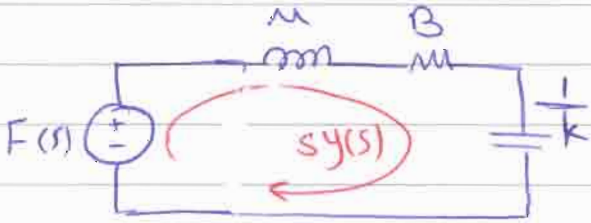


قانون دوم نیوتن نوشتم ═══ قانون KCL نوشتیم

$$\frac{SY(S)}{\frac{1}{MS}} + \frac{SY(S)}{\frac{1}{B}} + \frac{SY(S)}{\frac{1}{k}S} = F(S)$$

$$\rightarrow \frac{Y(S)}{F(S)} = \frac{1}{MS^2 + BS + k}$$

مدار معادل با تشابه نیرو–ولتاژ:

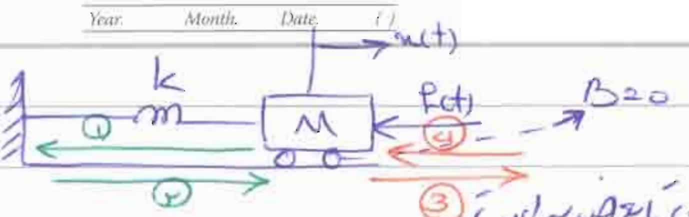


$$\rightarrow KVL:\ MS^2Y(S) + BSY(S) + \frac{k}{S}\cdot SY(S) = F(S)$$

$$\rightarrow \frac{Y(S)}{F(S)} = \frac{1}{MS^2 + BS + k}$$

BERKEH

Year. Month. Date. ( )



برق - ۸۹ (سوال 232):

ورودی تابع ضربه است ③

۱) $\left(\delta\left(t-\frac{4\pi}{\sqrt{\frac{K}{M}}}\right)\right)$

۲) $\delta\left(t-\frac{3\pi}{\sqrt{K/M}}\right)$

۳) $\delta\left(t-\frac{2\pi}{\sqrt{K/M}}\right)$

۴) هیچ‌کدام.

$$\frac{X(S)}{F(S)}=\frac{1}{M(S^2)+\cancel{B}S+K}$$

$$=\frac{1}{MS^2+K}=\frac{1}{S^2+\frac{K}{M}}$$

$$\rightarrow x(t)=\frac{1}{\sqrt{KM}}\sin\sqrt{\frac{K}{M}}\,t$$

$$\rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{K/M}}$$

گفتیم که برای اینکه بسته به مسیر ① و ② رفته باشد (یعنی نصف دوره) در اینجا ضربه باعث ایستادن می‌شود پس ما به $\frac{T}{2}$ ، $\frac{3T}{2}$ ، $\frac{5T}{2}$ ، ... نیاز داریم.

$$\rightarrow T=\frac{2\pi}{\sqrt{K/M}} \Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{K/M}},\ \frac{3\pi}{\sqrt{\frac{K}{M}}},\ \frac{5\pi}{\sqrt{\frac{K}{M}}}$$

① و ② و ③ و ④ ← یک دوره کامل است.

اگر در گزینه‌های ۱ و ۳ علامت منفی تبدیل به مثبت می‌شد، یعنی جهت اعمال نیرو عکس می‌شد، هر سه گزینه درست بود. در واقع هر سه گزینه نقطه تعادل هستند ولی برای ایستادن باید در جهت عکس حرکت نیرو اعمال شود. گزینه‌های ۱ و ③ مربوط به بازه حرکت ۱ و ۳ در شکل هستند. و نیروی اعمالی آن‌ها باید خلاف جهت نشان داده شود تا بایستد.

$$\left(\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} s + \frac{\sqrt{10}\, s}{3+s}\right) x_2(s) = \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{1}{s+3}$$

$$\to \frac{1}{\cancel{\sqrt{10}}}\left(2+3s+\frac{10s}{3+s}\right)x_2(s) = \frac{3}{\cancel{\sqrt{10}}}\frac{1}{s+3}$$

$$\to \frac{3s^2+9s^2+12s+6}{\cancel{s+3}}\, x_2(s) = \frac{3}{\cancel{s+3}}$$

$$\to x_2(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+4s+2}$$

چون ماشین حساب نداریم برای تعیین ریشه ± 1 و ± 2 و ± 3 را چک می‌کنیم.

$$= \frac{1}{(s+1)\underbrace{(s^2+2s+2)}_{(s+1)^2+1}} = \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{s^2+2s+2} \quad ①$$

$(s^3+3s^2+4s+2) \mid s+1$

$s+1=0$

$s=-1$

	1	3	4	2
$s=-1$				
	1	2	2	0

$$\to s^2+2s+2$$

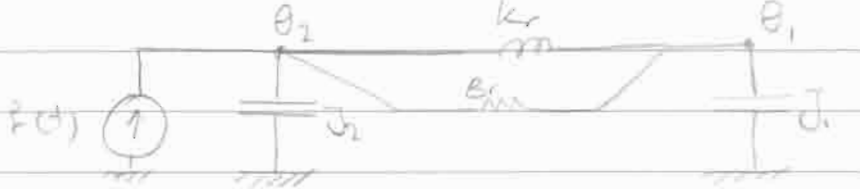
$$① \to L^{-1} = e^{-t} - e^{-t}\cos t = x_2(t)$$

مدلسازی سیستم مکانیکی چرخشی:

مکانیکی خطی		مکانیکی چرخشی	
x	موقعیت	θ	زاویه
V	سرعت	ω	سرعت زاویه‌ای
F	نیرو	T	گشتاور
B	اصطکاک	B_r	اصطکاک چرخشی
k	فنر	k_r	فنر چرخشی
(اینرسی خطی) m	جرم	J	اینرسی دورانی
a	شتاب	α	شتاب زاویه‌ای

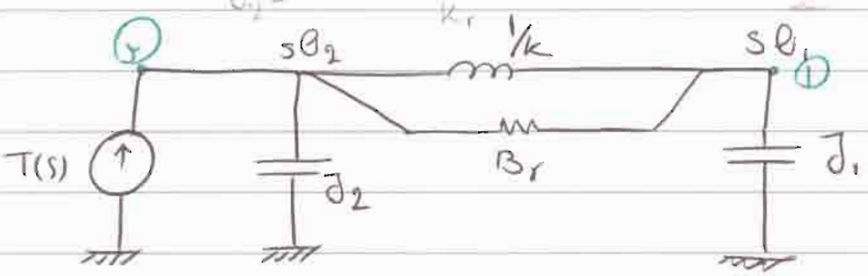
Year. Month. Date. ( )

حذف



$$\rightarrow -F(s) + \frac{s\theta_2(s)}{\frac{1}{J_2 s}} + \frac{s\theta_2 - s\theta_1}{\frac{s}{K_r}} + \frac{s\theta_2 - s\theta_1}{B_r} = 0$$

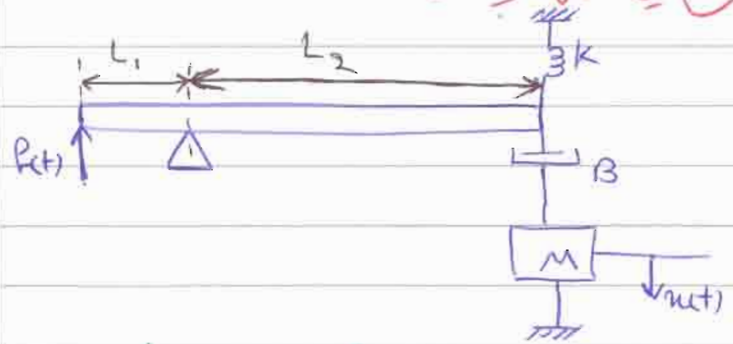
استاد



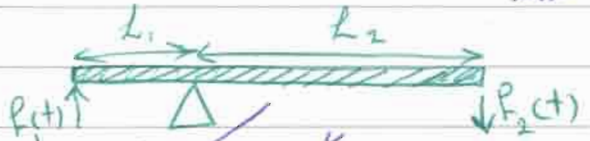
$$\text{kcl}(1): \frac{s\theta_1 - s\theta_2}{\frac{1}{k}s} + \frac{s\theta_1 - s\theta_2}{\frac{1}{B}} + \frac{s\theta_1}{\frac{1}{J_1 s}} = 0$$

$$\text{kcl}(2): \frac{s\theta_2 - s\theta_1}{\frac{1}{k}s} + \frac{s\theta_2 - s\theta_1}{\frac{1}{B}} + \frac{s\theta_2}{\frac{1}{J_2 s}} = T(s)$$

مدل‌سازی ترانس در سیستم‌های مکانیکی طولی و چرخشی:

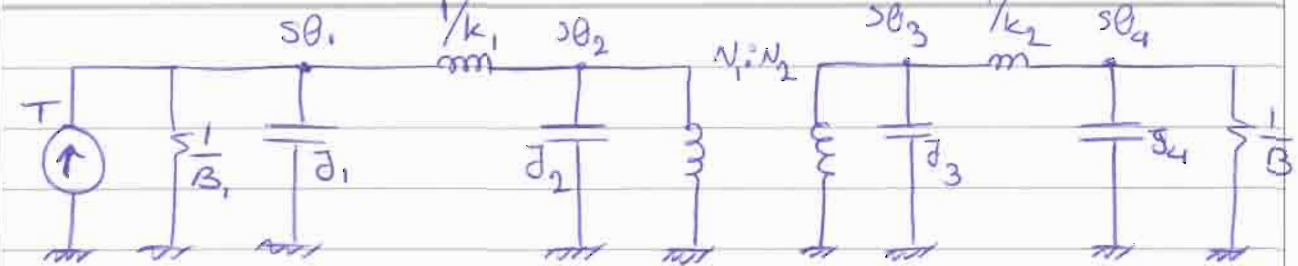


شکل (۱)



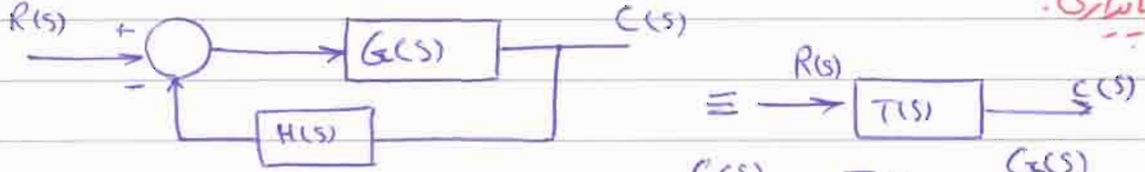
$$\rightarrow f_1(t)L_1 = f_2(t)L_2$$

چه متغیری در الکتریک وجود دارد که متغیر عبوری را با یک ضریب به متغیر عبوری دیگر تبدیل کند؟ ترانس



جلسه چهارم

تحلیل پایداری:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

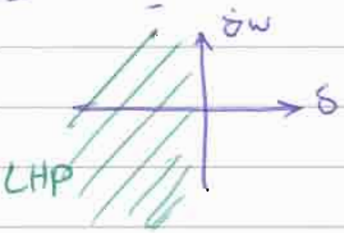
تابع تبدیل حلقه بسته

سؤال: $T(s)$ چه شرطی داشته باشد تا if $|r(t)| < M \rightarrow |c(t)| < M'$

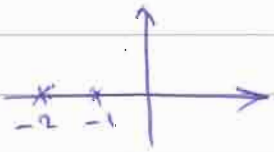
$B.I \rightarrow B.O$

تمامی قطب‌های $T(s)$ باید قسمت حقیقی منفی داشته باشند. S: closed loope pole

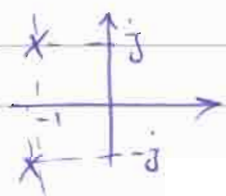
شرط پایداری: $\sigma < 0$ $\quad Re\{s\} < 0$



پایداری به صفرهای سیستم ربطی ندارد. پایداری فقط روی قطب‌ها کنترل می‌شود.



$$\rightarrow T(s) = \frac{k}{(s+2)(s+1)}$$



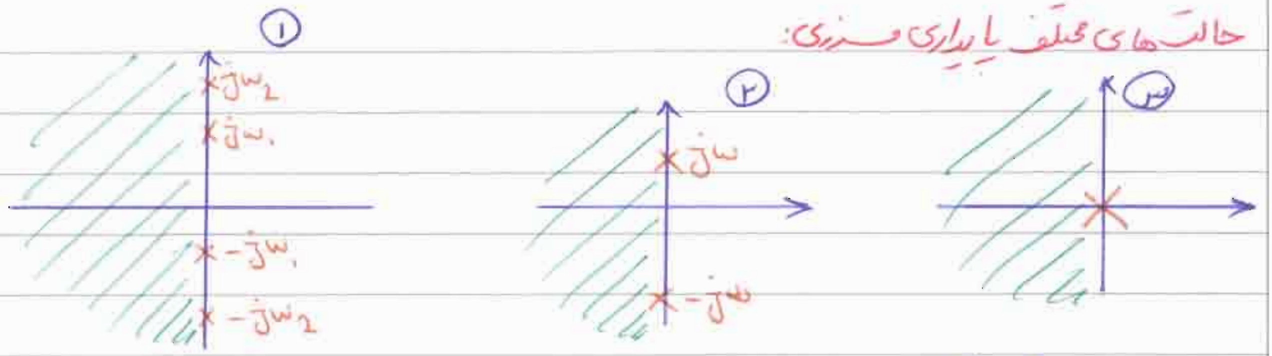
$$\rightarrow T(s) = \frac{k}{s^2+2s+2}$$

BERKEH

Year. Month. Date. ( )

سیستم ناپایدار: حداقل یک قطب T(s) سمت راست صفحه s داشته باشیم و یا یک قطب تکرار روی محور jω داشته باشیم.

حالت های مختلف پایداری مرزی:



هر سه شکل می گویند مرز پایداری. در حالت ۲: پاسخ حالت ماندگار نوسانی کامل است، با فرکانس $f_r = \frac{\omega}{2\pi}$. پس پاسخ نوسانی این سیستم دارد در همه قطب های آن سمت چپ و فقط یک جفت قطب روی jω داشته باشد.

از روی قطب سیستم حلقه بسته می توانیم پیدا کنیم سیستم پایدار است یا ناپایدار.

روش های تعیین پایداری سیستم کنترل: با روش تعیین علامت چند جمله ای مخرج. برای این عمل ۴ روش معمول است:

۱- معیار راث - هرویتز Routh-Hurwitz ← از روی تابع تبدیل حلقه بسته استفاده می شود

۲- روش مکان هندسی ریشه ها Root locus

۳- روش دیاگرام بود Bodé diagram

۴- معیار نایکوئیست Nyquist criteria

از روی تابع تبدیل حلقه باز استفاده می شود و در مورد پایداری حلقه بسته اظهار نظر می کند.

BERKEH

جدول راث:

s^n	$a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-k} \quad \cdots \quad a_2 \quad a_0$
s^{n-1}	$a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad \cdots \quad a_1$
s^{n-2}	$b_{n-2} \quad b_{n-3} \quad b_{n-4} \quad \cdots \quad a_0$
$\vdots$	c_{n-3}
s^1	
s^0	a_0

یکی در میان درایه‌های آخر a_0 می‌شود.

در هر سطر باید به مقدار $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ که n همان S^{n} است. بعد از اینکه دو سطر اول را نوشتیم درایه‌های دو سطر زیر دو سطر بالایی بدست می‌آید. سطر اول و دوم را به این صورت یکی در میان ضریب‌های s را نوشتیم.

$$b_{n-2} = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad c_{n-3} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-3} \end{vmatrix}}{b_{n-2}}$$

* آخرین درایه‌های سطرها زوج. اگر n زوج باشد با هم برابر است.

مثال) $s^3 - 9s^2 + s + 6 = 0$

s^3	$\oplus 1 \quad 1$
s^2	$\ominus 9 \quad 6$
s^1	$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 6 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-(6+9)}{-9} = \oplus\, 5$
s^0	6

* آخرین درایه سطر زوج، آخرین درایه همه سطرهای زوج زیر خودش است.

دو تغییرات علامت دارد. ← دو ریشه سمت راست، یک ریشه سمت چپ.

Year. Month. Date. ( )

حالت خاص اول: اولین درایه یک سطر صفر شود: ۱- روش ε، صفر برداریم به جای ε بگذاریم

$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0 \qquad \varepsilon \to 0$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	
s^2	$\cancel{0}\ \varepsilon$	3	
s^1	$\dfrac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} = -$		
s^0		$\boxed{\dfrac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} = 3}$	

این روش برای زمانی مناسب است که فقط یک صفر داشته باشیم.

$\varepsilon \to 0 \to$ مثبت است

دو تغییر علامت داریم

دو ریشه سمت راست، دو ریشه سمت چپ

$\varepsilon \to 0$

۲- در معادله مشخصه s را با $\frac{1}{s}$ تغییر حالت دهیم. با این کار مقدار ریشه ها عوض می شود

ولی در تغییر علامت (یعنی تعداد ریشه) تغییر ایجاد نمی شود)

$$\left[\left(\frac{1}{s}\right)^4 + \left(\frac{1}{s}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{s}\right) + 3 = 0\right] \times s^4$$

$$\to 3s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0 \to$$

s^4	3	2	1
s^3	2	1	
s^2	$+\ \frac{1}{2}\ (1)$	$1\ (2)\ \times 2$	
s^1	$-\ -3$		
s^0	$+\ 2$		

اینجا رو $\underline{\underline{2\times}}$ کردیم تا از کسری خارج شود

$RHP \leftarrow 2$

دو تغییر علامت

$LHP \leftarrow 2$

پاسخ $\underline{\times 2}$ شده

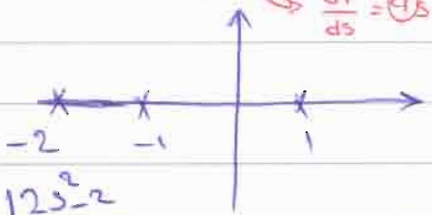
مثال) $s^3+2s^2-s-2=0$ اگر تغییر علامت بعد از صفر باشد هر چند ریشه سمت راست

s^3	1	-1
s^2	2	$-2 \rightarrow 2s^2-2=0 \begin{cases} s=1 \\ s=-1 \end{cases}$
s^1	$\cancel{0}$ 4	$\rightarrow 4s=0 \rightarrow \frac{dp}{ds}=4s$
s^0	-2	

داریم یعنیاً سمت چپ هم داریم

به تعداد یک تغییر علامت در ستون اول است

ریشه سمت راست داریم



$$s^3+2s^2-s-2 \;\Big|\; \frac{2s^2-2}{s+2} \rightarrow s+2=0 \rightarrow s=-2$$

(نکته مهم)

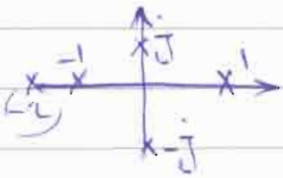
اگر سطر صفر داشته باشیم الزاماً قطب روی $j\omega$ نداریم یعنی الزاماً پایداری مرزی نداریم.

مثال) $s^5+3s^4-s-3=0$ در یک مسئله هر دو حالت صفر خاص اتفاق افتاد

s^5	1	0	-1
s^4	3	0	$-3 \rightarrow 3s^4-3 \Rightarrow \frac{dp}{ds}=12s^3+0$
s^3	$\cancel{0}$ 12	0	$\rightarrow$ سطر تمام صفر $\rightarrow$
s^2	$\cancel{0}$ ε	-3	
s^1	$\frac{36}{\varepsilon}$		
s^0	-3		

هم سطر صفر داریم و هم یک درایه صفر.

ε را عدد مثبت در نظر بگیریم یک تغییر علامت داریم.



$$s^4-1=(s^2-1)(s^2+1)$$

$$\Rightarrow s=\pm 1$$

$$s=\pm j$$

$$s^5+3s^4-s-3 \;\Big|\; \frac{3s^4-3}{s+2} \Rightarrow s=-2$$

مثال

$$\underbrace{s^5+s^4+5s^3+5s^2+4s+4}_{A}=0$$

	s^5	1	5	4
معادله کمکی →	s^4	1	5	4 → $p(s)=s^4+5s^2+4=0 \rightarrow \frac{dp}{ds}=4s^3+10s+0$
سطر صفر →	s^3	$\cancel{0}\ 4$	$\cancel{0}\ 10$	
	s^2	$10/4$	4	
	s^1	+		
	s^0	4		

تغییر علامت نداریم

B

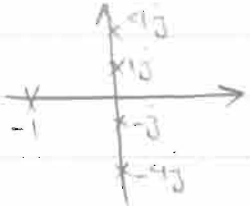
$s^4+5s^2+4=0 \rightarrow (s^2+1)(s^2+4)$

$\rightarrow \boxed{s=\pm 4j}$

$\boxed{s=\pm 1j}$

$A \div B = s+1 \rightarrow \boxed{s=-1}$

پایداری مرزی دارد چون ریشه روی محور jω دارد.



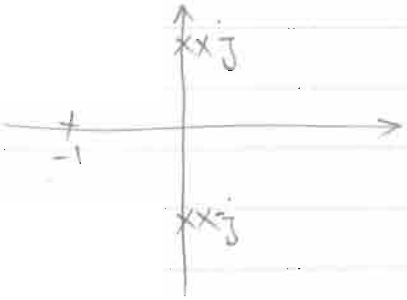
$$\underbrace{s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1}_{A}=0$$

	s^5	1	2	1
معادله کمکی →	s^4	1	2	1 → $\underbrace{p(s)=s^4+2s^2+1}_{B} \Rightarrow \frac{dp}{ds}=4s^3+4s+0$
	s^3	$\cancel{0}\ 4$	$\cancel{0}\ 4$	
معادله کمکی →	s^2	1	1 → $p(s)=s^2+1 \rightarrow dp=2s$	
	s	$\cancel{0}\ 2$		
	s^0	1		

$(s^2+1)^{2} \rightarrow \begin{cases} s=\pm 1 \\ s=\pm 1 \end{cases}$

قطب تکراری ناپایدار است

وقتی چند سطر صفر اتفاق می‌افتد، ریشه‌های آخرین دو عامل کلی در قبلی‌ها تکرار شده.



$A \div B = s+1 \rightarrow \boxed{s=-1}$

چون قطب تکراری روی jω داریم، ناپایدار است.

s^6	1	3	3	1
s^5	1	3	2	
s^4	0	1	1	
s^3				
s^2				
s^1				
s^0				

اگر ε بگذاریم حل کردن آن بسیار سخت می‌شود. اما

چون در بالاها اتفاق افتاد از همان ابتدا $\frac{1}{s}$ بگذاریم:

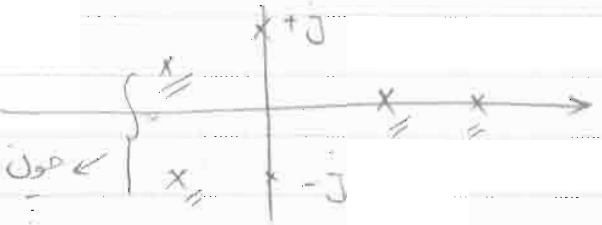
$$\xrightarrow{s=1/s} s^6+2s^5+3s^4+3s^3+3s^2+s+1=0$$

s^6	1	3	3	1
s^5	2	3	1	
$2\times$ s^4	$\frac{3}{\cancel{2}}$ 1	$\frac{5}{\cancel{2}}$ 1	$\cancel{1}$ 2	
$3\times$ s^3	$\frac{-1}{\cancel{3}}$	$\frac{-1}{\cancel{3}}$		
s^2	2	2		
s^1	$\cancel{0}$ 4			
s^0	2			

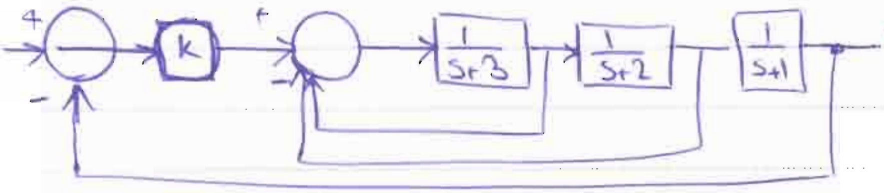
دو تغییر علامت

$$\xrightarrow{\text{صفر}} p(s)=2s^2+2 \rightarrow \frac{dp}{ds}=4s$$

$$\rightarrow (s^2+1)=0 \rightarrow s=\pm j$$



چون تغییر علامت قبل از سطر صفر اتفاق افتاد پس
ریشه‌ها بنابر متقارن باشند



سؤال 35: برق 83:

$$T(s)=\frac{\frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1+\frac{k}{(s+1)(s+2)(s+1)}+\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}}=\frac{k}{\frac{(s+1)(s+2)(s+3)+k(s+1)(s+2)+s+1}{s^3+6s^2+11s+6}}$$

$$\rightarrow T(s)=\frac{k}{s^3+7s^2+15s+9+k} \rightsquigarrow \Delta(s)=s^3+7s^2+15s+9+k$$

برای اینکه نوسانی شود یک جفت روی $j\omega$ نیاز داریم ← باید یک سطر صفر کنیم

$$\begin{array}{c|ll} s^3 & 1 & 15 \\ s^2 & 7 & 9+k \;\; (1) \\ s^1 & \frac{96-k}{7}=0 \rightarrow k=96 \rightarrow & \text{در قطب روی } j\omega \\ s^0 & 9+k \rightarrow k=-9 & \end{array}$$

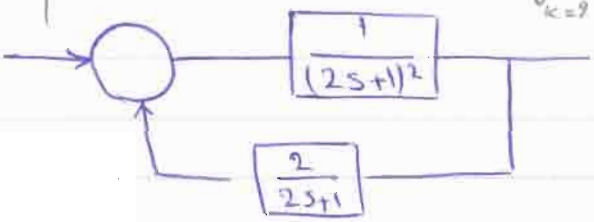
اگر $k=-9$ مرز پایداری بدون نوسان است چون قطب در مبدأ است

$$(1) \xrightarrow[k=96]{\text{کمکی}} 7s^2+105=0 \rightarrow s=\pm j\sqrt{\frac{105}{7}}=\pm j\sqrt{15}$$

فرکانس نوسان

$$f_r=\frac{\sqrt{15}}{2\pi}$$

برق 84، سؤال 48:

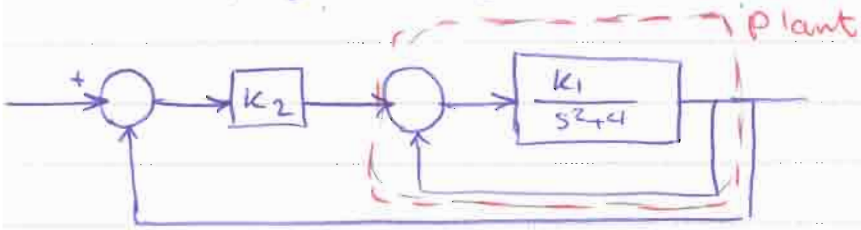


$$T(s)=\frac{k(2s+1)}{(2s+1)^3+2k}$$

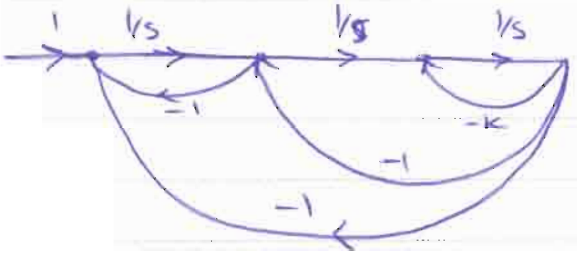
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$(s+a)(s+b)(s+c) = s^3+(a+b+c)s^2+(ab+ac+bc)s+abc$$

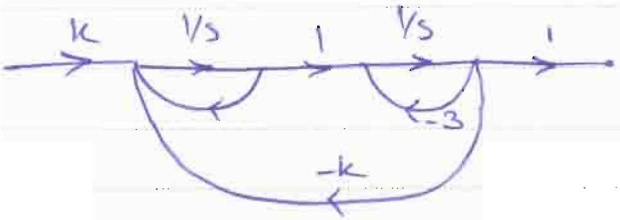
برق ۹۰ _ سؤال 273: k_1 چنان باشد که plant در مرز پایداری باشد:



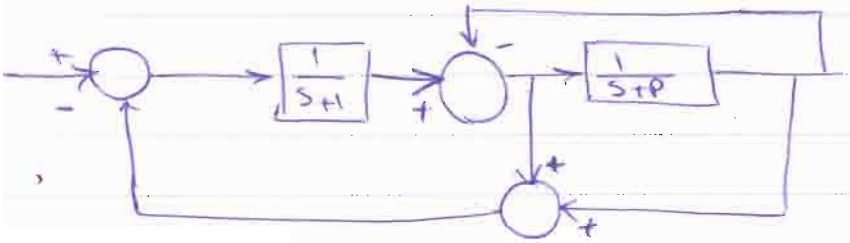
سؤال ۹۹، برق 84:



اتوماسیون 83 سؤال 200:



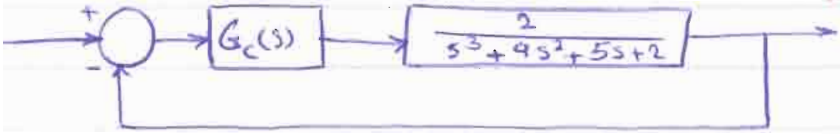
سؤال 135، سال 88:



PAPCO

جلسه پنجم

سؤال 28 ـ سراسری 83 :



$G_c(s)=k+\frac{k_I}{s} \rightarrow PI$ کنترلر ابتدا ضریب پایداری برای کنترلر P را بدست می‌آوریم

$G_c(s)=k_p \rightarrow P$ 〃 بعد کنترلر PI را حل می‌کنیم.

$G_c(s)=k_p+k_D s \rightarrow PD$ 〃

$G_c(s)=k_p+\frac{k_I}{s}+k_D s$ PID 〃 $\rightarrow$ در اینجا کتاب جواب را می‌دهد ولی پاسخ محمل است.

حلقه بسته : $T(s)=\dfrac{2k_p}{s^3+4s^2+5s+2+2k_p}$

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 5 \\
s^2 & 4 & 2+2k_p \\
s^1 & \frac{20-2-2k_p}{4}>0 \rightarrow & k_p<9 \\
s^0 & 2+2k_p>0 \rightarrow & k_p>-1
\end{array}
$$

ضریب کنترلر نوع P: $\boxed{-1<k_p<9}$

$G_c(s)=\dfrac{k_p s+k_I}{s}$ ← در مخرج s داریم ، یعنی قطب در مبدأ داریم این یعنی کنترلر PI همواره Type را زیاد می‌کند.

$G(s)=\dfrac{2(k_p s+k_I)}{s(s^3+4s^2+5s+2)} \longrightarrow$ حلقه بسته $=T(s)=\dfrac{2(k_p s+k_I)}{s^4+4s^3+5s^2+(2+2k_p)s+k_I}$

PAPCO

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s^4+3s^2+7}{s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1} \qquad X(s)=\frac{1}{s}\ ,\ y_{ss}=?$$

$$y_{ss}=\infty$$

هر جا هر چیزی مربوط به ss یعنی حالت ماندگار خواست اول پایداری باید بررسی شود

حل اشتباه:

$$y(s) = \frac{s^4+3s^2+7}{s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1}\cdot\frac{1}{s}$$

$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,y(s) = 7 \rightsquigarrow$$ غلط

$$= \lim_{t\to\infty} y(t)$$

بررسی پایداری

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	0	0	
s^2			
s^1			
s^0			

مشتق

$$\to s^4+2s^2+1=0$$

$$(s^2+1)^2=0$$

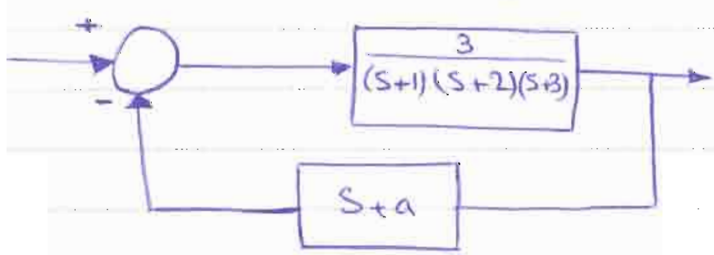
قطب تکراری داشته

سیستم ناپایدار است.

$$\boxed{y_{ss}=\infty}$$

در حوزه زمان، هنگامی که قطب تکراری روی $j\omega$ داشته باشیم نمی‌دانیم در حوزه چه اتفاقی برای سیستم می‌افتد (در حوزه زمان)

سراسری 86 سوال 77: نمودار نایکوئیست سیستم به صورت زیر است. به ازای چه مقدار a سیستم



پایدار است:

PAPCO

$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + s + k = 0$$

s^3	1	1
s^2	2	k
s^1	$2-k>0$	
s^0	$k>0$	

$\rightarrow 0<k<2 \rightarrow$ سیستم حلقه بسته پایدار است

$k=2 \rightarrow e(t) = C\sin(t+\theta)$

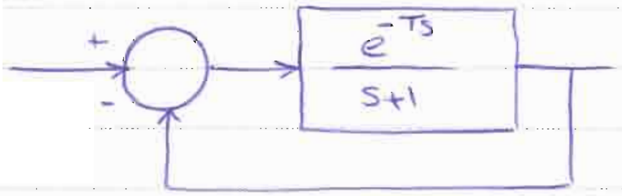
بررسی گزینه‌ها: ۴ ← پس ردی شود چون $\sqrt{2}$ = فرکانس نوسان ما ۱ = ω است

۳ ← نوسان ← قطب روی محور نه صفر ← رد شد.

۲ ← به ازای یک سری از kها پایدار است ← " "

۱ ← صحیح است.

تحلیل پایداری سیستم‌های تأخیردار



در اینجا T زمان تأخیر است. می‌خواهیم

را طوری پیدا کنیم سیستم پایدار شود.

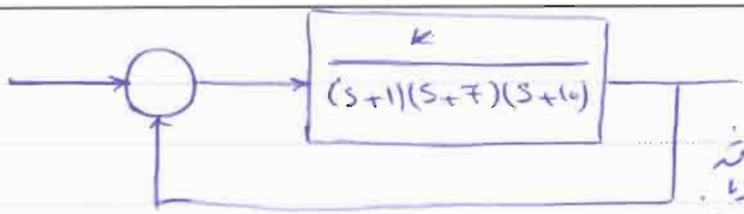
$$e^{-Ts} = \frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}$$

تابع نمایی ← چند جمله‌ای درجه یک تقریب زده شده است.

$$\rightarrow G(s) = \frac{1-\frac{Ts}{2}}{(s+1)(1+\frac{Ts}{2})} = \frac{2-Ts}{(s+1)(2+Ts)}$$

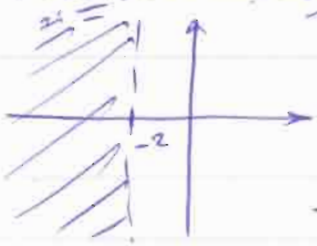
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{2-T(s)}{(s+1)(2+Ts)+(2-Ts)}$$

سؤال 132:



k را چنان بیابید که زمان نشست از ۴ کمتر باشد.

k را چنان بیابید که قطبهای حلقه بسته زیاد میرا شونده باشند. یعنی قسمت حقیقی قطب‌ها کمتر از ۲- باشد.



$\Delta(s-2)$: stable

۱) 6 ۲) 30 ۳) 180 ۴) 38

$$T(s)=\frac{k}{(s+1)(s+7)(s+10)+k}$$

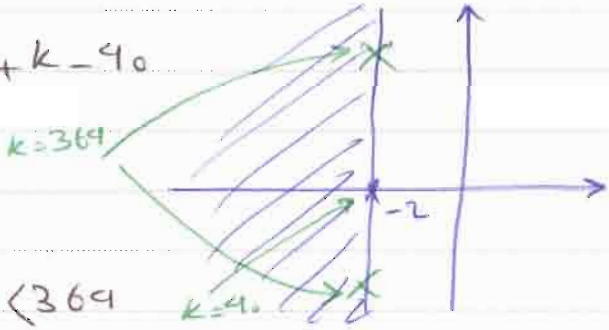
$$\to \Delta(s)=s^3+18s^2+87s+70+k$$

$$\to \Delta(s-2)=(s-2)^3+18(s-2)^2+87(s-2)+70+k$$

$$\to \Delta(s-2)=s^3+12s^2+27s+k-40$$

s^3	1	27
s^2	12	$k-40$
s^1	$364-k>0$	
s^0	$k-40>0$	

$40<k<364$



$k=364 \to$ قطب‌ها روی -2

مرز ناپایدار

ضرب سه تایی:

$$(s+a)(s+b)(s+c)$$

$$=s^3+(a+b+c)s^2+(ab+ac+bc)s+abc$$

بردار حالت: برداری است که شامل متغیرهای حالت می‌شود.

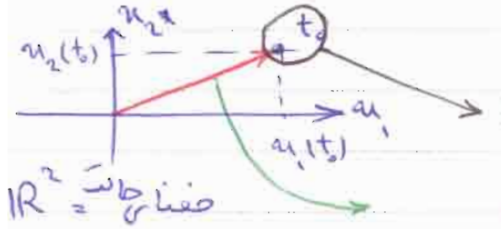
$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{متغیر حالت}$$

بردار حالت

تعداد متغیرهای حالت n است که مرتبه سیستم است، تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی است.

مرتبه مخرج تابع تبدیل حلقه بسته است. حداقل شرایط لازم برای تعیین خروجی است.

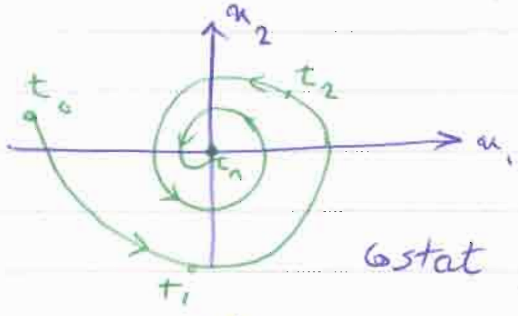
فضای حالت: فضای اقلیدسی n بعدی که n تعداد متغیرهای حالت است را فضای حالت می‌گویند.



فضایی که به تعداد متغیرهای حالت بعد یا محور دارد.

معادله حالت: معادله حالت یعنی تغییرات بر حسب زمان، وقتی می‌نویسیم تغییرات یعنی مشتق داریم.

پایداری یعنی xها یا همان stateها با گذشت زمان به صفر بروند یا به مبدا حرکت کنند:



معادله مسیر حالت: معادله‌ای است که از حذف t بین stateها

$$x_1(t) = e^{-2t}\, u(t)$$

$$x_2(t) = e^{-4t}\, u(t) \rightarrow x_2 = x_1^2 \qquad x(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ بدست می‌آید}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(یک مسیر نسبتاً در trajectory است نه به سمت بی‌نهایت می‌رود و نه به سمت صفر).

معادلات حالت: $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ $\qquad y = g(x(t), u(t), t)$ در حالت کلی

مشتق

ضرایب متغیر با زمان باشند

LTV: $\dot{x} = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$ LTV

$y = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$

LTI:

$$SS\begin{cases}\underset{n\times1}{\dot{x}} = \underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times1}{x(t)} + \underset{n\times p}{B}\,\underset{p\times1}{u(t)}\\ \underset{m\times1}{y} = \underset{m\times n}{C}\,\underset{n\times1}{x(t)} + \underset{m\times p}{D}\,\underset{p\times1}{u(t)}\end{cases}$$

ماتریس حالت — بردار حالت — ورودی — ماتریس ورودی

معادلات فضای حالت سیستم تغییر ناپذیر با زمان

ماتریس انتقال مستقیم

خروجی — ماتریس خروجی

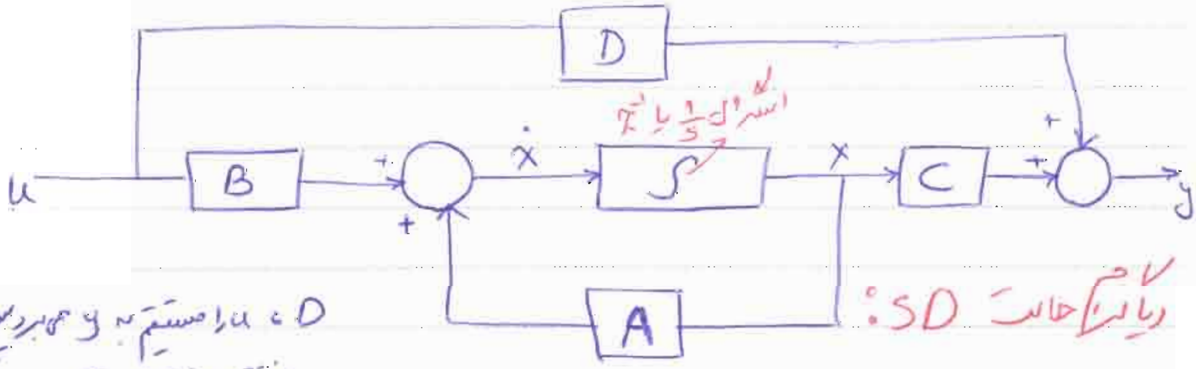
ماتریس B: سطرهایش stat ها را نشان می‌دهد ستون‌هایش ورودی‌ها را نشان می‌دهد.

در کنترل خطی $p = m = 1$ است.

SISO: $p = 1$, $m = 1$

MIMO: $p \neq 1$, $m \neq 1$

ماتریس C: سطرها = ورودی، ستون‌ها: stat هاست.



دیاگرام حالت: SD

D، u را مستقیم به y می‌برد پس ماتریس انتقال مستقیم است.

φ ماتریس است و $x(0)$ بردار شرایط اولیه است و $x(t)$ حالت در t است :

$$\boxed{x(t) = \varphi(t)x(0)}$$

$$x(0) \xrightarrow{\times \varphi(t)} x(t)$$

نکته :

در واقع ماتریسی است که حالت ها را از صفر به t می برد.

نکته :

$\varphi(0) = I$ خاصیت اول

$\varphi(0)$ ماتریسی است که حالت ها را از صفر به صفر می برد یعنی ماتریس همانی. پس اولین خاصیت φ ماتریس همانی است.

$$\dot{X} = \dot{\varphi}(t)\, x(0) = A\,x(t).$$

نکته :

پس اگر از φ مشتق بگیریم در $t=0$ همان ماتریس خاصیت دوم $t=0 \longrightarrow \dot{\varphi}(0) = A$

A که ماتریس حالت است بدست می آید.

نکته: اگر در ماتریسی t را صفر گذاشتیم و I نشد ، آن ماتریس انتقال حالت نیست .

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1-e^{-t} \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{مشتق}]{t=0} A = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بسط : $e^{At} = I + \overset{\text{ماتریس}}{At} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots$

$$\boxed{Ae^{At} = e^{At}A}$$ خاصیت سوم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

می‌خواهیم $\varphi(t)$ را بدست آوریم A داده شده است. ماتریس انتقال حالت می‌خواهیم :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow SI - A \Rightarrow \begin{bmatrix} S-0 & -1 \\ -(-3) & S-(-4) \end{bmatrix} = SI$$

$$\rightarrow S = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 3 & S+4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow (SI-A)^{-1} = \frac{1}{S^2+4S+3}\begin{bmatrix} S+4 & 1 \\ -3 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S+4}{(S+1)(S+3)} & \frac{1}{(S+1)(S+3)} \\ \frac{-3}{(S+1)(S+3)} & \frac{S}{(S+1)(S+3)} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(S) = \begin{bmatrix} \frac{\frac{3}{2}}{S+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{S+3} & \frac{1/2}{S+1} + \frac{-1/2}{S+3} \\ \frac{-\frac{3}{2}}{(S+1)} + \frac{3/2}{(S+3)} & \frac{-1/2}{S+1} + \frac{3/2}{S+3} \end{bmatrix} \rightarrow \varphi(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

قطب‌های سیستم در $\varphi(t)$ نشان می‌دهند $S=-1$ و $S=-3$ ریشه‌های مخرج

نمای e شده. -3 و -1 یعنی میرا می‌شود. یعنی می‌توان از روی $\varphi(t)$ خیلی چیزها

راجع به پایداری بدست آورد.

تمرین از منزل $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$

$$\varphi(S) = \begin{bmatrix} \frac{S+4}{(S+2)^2} & \frac{1}{(S+2)^2} \\ \frac{-4}{(S+2)^2} & \frac{S}{(S+4)^2} \end{bmatrix}$$

$\varphi^{-1}(L^{-1}) = ?$

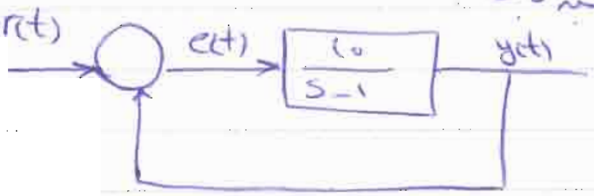
PAPCO

اولین ضریب مخرج یعنی a_n یا ضریب بیشترین درجه همیشه 1 است اگر نبود طرفین را بر a_n تقسیم می‌کنیم تا $a_n=1$ شود. (یعنی ضریب s^n)

مثال) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+1}{s^2+4s+5} \xrightarrow{L^{-1}} y''+4y'+5y = 2r'+r$

از روی معادله دیفرانسیل می‌توان فهمید که سیستم پایدار است یا خیر. البته با فرض اینکه معادله دیفرانسیل حلقه بسته باشد.

مثال)



حلقه باز $\to s=1 \to$ ناپایدار

$\xrightarrow{L^{-1}} y'-y=0 \to$ ناپایدار

حلقه بسته $\to \frac{10}{s-1+10} = \frac{10}{s+9} \to s=-9$

$y'+9y=0 \to$ پایدار

$\xrightarrow{\text{حلقه بسته}} y'+9y = 10r(t)$

$\xrightarrow{\text{حلقه باز}} y'-y = 10e(t)$

$y'''+4y'+5y = 2r'+r \to$ در اینجا چون y'' نداریم ناپایدار است.

SS : یعنی تبدیل یک معادله از مرتبه n به n تا معادله مرتبه 1.

فضای حالت : SS : دستگاه معادله دیفرانسیل

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax+Bu\\ y &= Cx+Du\end{aligned}\right\}$$

چون هدف بدست آوردن $T(s)$ یا تابع تبدیل است باید $x(0)=0$ شود.

محاسبه تابع تبدیل $(x(0)=0)$ ⊛

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

$$y(s) = C x(s) + D\, U(s)$$

$$\rightarrow y(s) = C(sI - A)^{-1} B\, u(s) + D\, u(s)$$

$$\rightarrow y(s) = u(s)\left[C(sI - A)^{-1} B + D\right]$$

$$\rightarrow \frac{y(s)}{u(s)} = C\,\underbrace{(sI - A)^{-1}}_{(1)} B + D$$

در اینجا اگر در رابطه (۱) $s \to \infty$ میل شود این قسمت (۱) صفر می‌شود. بنابراین در $h(s)$

اگر $s \to \infty$ یک عددی بدست آمد آن عدد معادل ماتریس D است. یعنی در تابع تبدیل

نسبت بالاترین درجه صورت به بالاترین درجه مخرج همان D است.

D یا عدد است که در آن صورت سیستم proper است. و اگر D صفر شود یعنی sticktly proper است.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{A^{*}}{|A|} \rightarrow \text{ماتریس الحاقی}$$

$$= \frac{N^{T}}{|A|}$$

قطب‌های سیستم و مقادیر ویژه ماتریس A

ممکن است ماتریس A سه در سه باشد ولی توان s مخرج ۱ باشد یعنی دو قطب از ساده شدن صورت و مخرج از بین رفته. در واقع اگر مرتبه ماتریس A با مرتبه مخرج تابع یکی نباشد قطب‌ها حذف شده‌اند.

مثال ۲) فرض کنید معادلات حالت سیستم به صورت زیر باشد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

در این سیستم: تابع اکیداً سره است چون D ندارد.

چون ماتریس 2×2 است ← مخرج درجه ۲ است چون سیستم اکیداً سره است یعنی درجه صورت از مخرج کمتر است. پس درجه صورت یا ۱ است یا صفر. درجه صفر یعنی صورت عدد ثابت باشد.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$$

$$(SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+s+2}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

(۲) از روی شکل دو $\rightarrow$ چون در بی نهایت صفر شده است $\xrightarrow{A} h(+\infty) = \lim_{s\to\infty} s\,H(s) = 0$

" " $\rightarrow$ " " ابتدا " $\xrightarrow{B} h(0^+) = \lim_{s\to 0} s\,H(s) = 0$

$\hookrightarrow$ توان مخرج از صورت ۲ تا بیشتر است زیرا صورت عدد پس مخرج درجه ۲

مخرج درجه ۲ است چون ماتریس A 2×2 است. پس صورت چون ۲ تا اختلاف

درجه دارد پس صورت عدد است.

$$= \frac{1}{s^2+s+2}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+s+2}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & \boxed{0} \end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} = \frac{2}{s^2+s+2}$$

برای اینکه صورت عدد شود
حتماً باید صفر شود فقط گزینه ۱
این شرایط را دارد.

$$H(s) = \frac{2}{s^2+s+2}$$

پاسخ پله $\Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow \frac{Y(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{2}{s^2+s+2}$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\times\frac{2}{s^2+s+2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$|sI-A| = |sI - \overbrace{T^{-1}AT}^{A_{new}}| = |sT^{-1}T - T^{-1}AT|$$

$$I \to T^{-1}T$$

$$= |T^{-1}(sI-A)T|$$

$$= \cancel{|T^{-1}|}\,|sI-A|\,\cancel{|T|}$$

$$|sI-A| = |sI-A| \checkmark$$

مثال)

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 2r(t) \quad (OD)$$

تحقق (۱) :

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6} \quad (TF)$$

تحقق در حالتی است که مشتقات تابع تبدیل نداریم. به بیان دیگر در صورت s نداریم.

این سیستم مرتبه ۳ است باید ۳ stat تعریف کنیم هر عرض را stat می‌دیم:

$$\underset{①}{y = x_1}, \quad \underset{②}{y' = x_2}, \quad \underset{③}{y'' = x_3}$$

c.s. $\xrightarrow{\text{از روی}}$ معادله ۱،۲،۳

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2r$$

از روی معادله اصلی

$$\to \underset{\dot{X}}{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} + \underset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}} \underset{u}{r}$$

$$y = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

PAPCO

ب)

تحقق در حالتی سیستم صفر محدود دارد به عبارت دیگر در معادله دیفرانسیل سیستم مشتقات
سیستم هم دیده می‌شود:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0s^2+2s+1}{s^3+6s^2+11s+6}$$

C

$x-1$ A

$$\rightarrow y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 2\dot{u} + u$$

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}} \xrightarrow{W(s)} \boxed{2s+1} \longrightarrow Y(s)$$

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \longrightarrow \dddot{w} + 6\ddot{w} + 11\dot{w} + 6w = u \quad (1)$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = 2s+1 \longrightarrow 2\dot{w} + w = y$$

$$(1) \longrightarrow \begin{cases} w = x_1 & \longrightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{w} = x_2 & \qquad\quad \dot{x}_2 = x_3 \\ \ddot{w} = x_3 & \qquad\quad \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \end{cases}$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله مشخصه ماتریس زیر کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -k & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s) = s^5 + 5s^4 + ks^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

حال از روی این معادله مشخصه می‌توانیم به روش راث k را چنان تعیین کنیم که سیستم پایدار یا ناپایدار شود.

بدست آوردن دیاگرام حالت از روی فضای حالت $SS \rightarrow SD$

در حالتی که در صورت s نداریم:

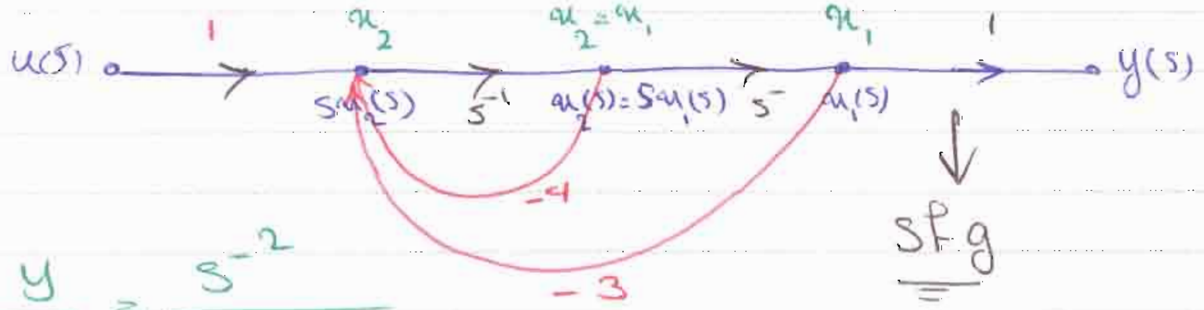
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + u$

$y = x_1$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

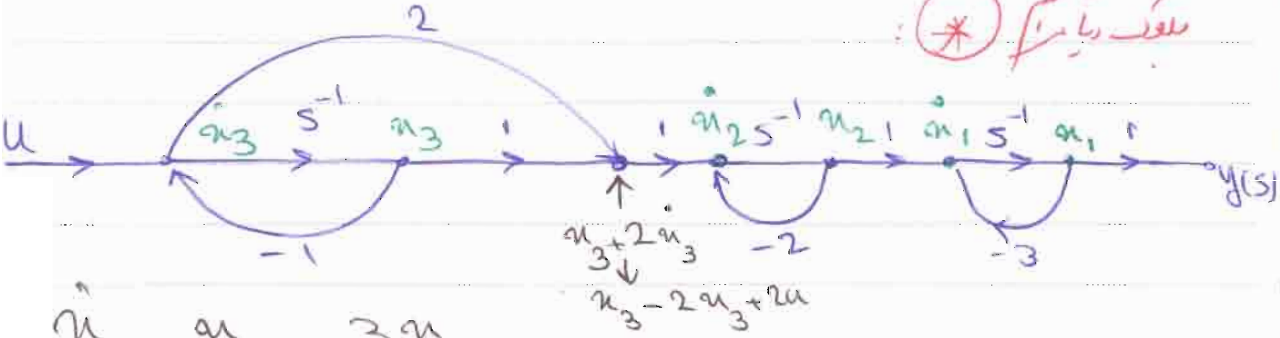


SFG

$$\frac{y}{u} = \frac{s^{-2}}{1 + 4s^{-1} + 3s^{-2}}$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{a s^{-1} + c}{1 + b s^{-1}} = \frac{c s + a}{s + b}$$

ملاک دیاگرام: ⊛



$$\dot{x}_1 = x_2 - 3x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 - x_3 + 2u$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + u$$

$$y = x_1$$

ضریب u

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تحقق موازی: یا پارالل (paralel، Gilbert، Normal form):

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{-1/2}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{-5/2}{s+3}$$

بین کسرها علامت جمع است پس موازی است. تحقق های پارالل و سری معمولاً

برای حالتی است که تفکیک پذیر است. در غیر این صورت، مختلط می شود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$G(S)=\frac{6s^2+22S+18}{(S+1)(S+2)(S+3)}=\frac{1}{S+1}+\frac{2}{S+2}+\frac{3}{S+3}$$

$\boxed{u=r-y}$

$$\longrightarrow \dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\overset{r-y}{u}$$

?

اگر صفر شود حلقه (۱).

$$y=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1=-x_1+u=-x_1+r-(x_1+2x_2+3x_3)=-2x_1-2x_2-3x_3+r$$

$$\dot{x}_2=-2x_2+u=-x_2+r-(x_1+2x_2+3x_3)=-x_1-4x_2-3x_3+r$$

$$\dot{x}_3=-3x_3+u=-3x_3+r-(x_1+2x_2+3x_3)=-x_1-2x_2-6x_3+r$$

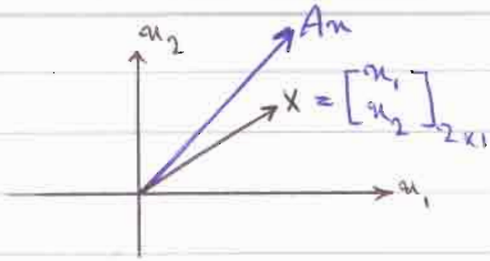
$$\longrightarrow \dot{x}=Ax+Br\longrightarrow \dot{x}=\begin{bmatrix}-2&-2&-3\\-1&-4&-3\\-1&-2&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}r$$

در واقع این یعنی تحقق موازی $\frac{y}{u}$ (حلقه ۱:) ماتریس قطری می‌شود ولی $\frac{y}{r}$ (حلقه بسته)

ماتریس قطری نمی‌شود.

اعداد روی قطر ماتریس قطری قطب‌های سیستم هستند به شرطی که هیچ یک از درایه‌های

ماتریس C صفر نشود.

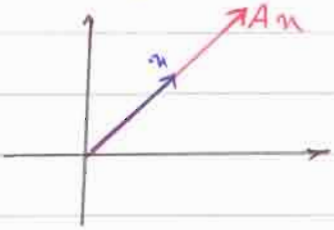


مقادیر ویژه و بردار ویژه:

$$A_{2\times2} \cdot x_{2\times1} = y_{2\times1}$$
$$n\times n \quad n\times n \quad n\times1$$

اگر یک ماتریس $n\times n$ را در بردار $n\times1$ ضرب کنیم یک بردار $n\times1$ می‌دهد.

گاهاً ممکن است ماتریس را در برداری ضرب کنیم که برداری به ما بدهد در راستای بردار قبلی در این صورت



این ماتریس مانند یک عدد عمل می‌کند:

$$\underset{\text{ماتریس}}{A}\ \underset{\text{بردار}}{x} = \overset{\text{مقدار ویژه}}{\underset{\text{عدد}}{\lambda}}\ \overset{\text{بردار ویژه}}{\underset{\text{بردار}}{x}}$$

$$\rightarrow \lambda x - Ax = 0 \longrightarrow \underbrace{(\lambda I - A)}_{\text{این زمانی جواب دارد که:}} x = \underset{\text{ما بردار صفر}}{\bar{0}}$$

$|\lambda I - A| = 0$ ← مقدار ویژه

$\rightarrow x \neq 0$ بردار ویژه

مثال) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ λ و بردار ویژه‌ها را حساب کنید؟

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow (\lambda+1)(\lambda+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

← مقادیر ویژه ← ما به ازای هر مقدار ویژه یک بردار ویژه داریم، پس به ازای اعداد مختلط و یا مقادیر ویژه تکراری داشته باشیم فرق می‌کند که برای ما سؤال می‌دهند.

محاسبه بردار ویژه:

$$Ax = \lambda x \xrightarrow{\text{در رابطه با } \lambda=-1} Ax = -1\times x \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Year Month Date ( )

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

برای اینکه بدانیم بردار ویژه‌ها مستقل خطی هستند یا نه؟ آنها را داخل یک ماتریس قرار می‌دهیم، اگر دترمینان ماتریس مخالف صفر شود قطعاً مستقل خطی هستند: درواقع دترمینان ماتریسی که ستون‌های آن بردار ویژه هستند همواره مخالف صفر است چون مستقل خطی است:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

قطری سازی:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{sys1}$$

$$\begin{aligned} x &= Tz \\ \dot{x} &= T\dot{z} \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} \overbrace{T\dot{z}}^{\dot{x}} = A\overbrace{Tz}^{x} + Bu \\ y = C\underbrace{Tz}_{x} + Du \end{cases} \xrightarrow[\text{from left}]{\times T^{-1}} \text{sys2} \begin{cases} \dot{z} = \underbrace{T^{-1}AT}_{A_{new}}z + \underbrace{T^{-1}B}_{B_{new}}u \\ y = \underbrace{CT}_{C_{new}}z + \underbrace{D}_{D_{new}}u \end{cases}$$

Sys1 & sys2 : similar → ② مقادیر ویژه → ① تابع تبدیل

① $\rightarrow C[sI-A]^{-1}B + D = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D$

دو سیستم به ازای ۲ شرط فوق تشابه هستند.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x$$

نکته:

اگر T که ستون‌های آن، بردار ویژه‌ها ماتریس A است ← ماتریس مودال است

Modal matrix

② Year Month Date

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(-1/2)(-2)}{s+3} + \frac{0(1/2)}{s+1}$$

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow$ ماتریس قطری

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \qquad y = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_n] x$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 c_1}{s+\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{s+\lambda_2} + \dots + \frac{b_n c_n}{s+\lambda_n}$$

نکته: هر درایه نظیر ماتریس قطری A در ماتریس B و یا ماتریس C و یا هر دو صفر بود قطبی

ای یا صفر می شود که در تابع تبدیل دیده نمی شود. پس در اینجا سیستم به حذف صفر و قطب دارد

درایه ی نظیر ماتریس قطری A در B ، C و یا هر دو صفر شده است. اگر هیچ یک از عناصر

B و C صفر نباشند حتماً حذف صفر و قطب نداریم.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 c_1}{s+\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{s+\lambda_2} + \dots + \frac{b_n c_n}{s+\lambda_n}$$

مثال: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [-1 \;\; 1] x$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 3) \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+3)}$$

اینجا قطبی در حال حذف شدن است که ناپایدار است یعنی stat ی داریم که به سمت بی نهایت می رود. عکس

با اینکه تابع تبدیل سیستم پایدار شود یا اینکه تابع تبدیل سیستم ناپایدار شود. بستگی به تعریفی دارد که انجام می دهیم

مفهوم کنترل‌پذیری: اگر state ناپایداری داشته باشیم که ورودی کنترل دخیل باشد می‌توان ورودی را طوری طراحی کرد که آن state به سمت پایداری برود.

سیستمی را کنترل‌پذیر گویند که بتوان توسط ورودی **محدود**، تمامی حالت‌ها را از $x(t_0)$ به $x(t_f)$ برد (در زمان محدود)

تست (۱): ماتریس کنترل‌پذیری: $\varphi_c = [\underset{2\times1}{B} \quad \underbrace{\underset{2\times2}{A}\underset{2\times1}{B}}_{2\times1} \quad A^2B \dots A^{n-1}B]$

در کل مربعی می‌شود (φ_c) $\longleftarrow$

در حالت کلی φ_c مربعی نیست. در کنترل خطی مربعی است. (SISO)

if $|\varphi_c| \neq 0 \longrightarrow$ Controllable کنترل‌پذیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [-1 \quad 1] x$$

$$\varphi_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad |\varphi_c| \neq 0 \longrightarrow \text{کنترل‌پذیر}$$

$B \uparrow \qquad \uparrow AB$

از طریق تست (۱) می‌توان فهمید سیستم کنترل‌پذیر است یا خیر.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s+3}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s+3}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{8}\,4 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-1 \quad \cancel{2}\,0 \quad 1] x$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s+3}$$

Subject:
Year: Month: Date:

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF(s) = \infty \times$$

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s) = 0 \checkmark$$

هر موقع سیستم proper باشد (I.V.T) این قوانین صدق می‌کند فقط

برای streatcly proper قضیه I.V.T صدق می‌کند.

وقتی سیستم proper باشد برای قضیه I.V.T باید از قسمت strictly proper تابع

پاسخ استفاده گردد.

اتوماسیون 88 - 1204

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{s^4+3s^2+7}{s(s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1)}$$

ورودی سیستم $X(s)$ پله است:

$x(s) = 1/s$ $\quad y(0) = ?$, $y(\infty) = ?$

این سیستم ناپایدار هست. ولی برای اینکه از این روش استفاده کنیم

$$y(0^+) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = 0$$

اول باید سیستم پایدار باشد چون در روش اول غلط جواب صحیح می‌دهد

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = 7 \times$$

$y(\infty) = \infty$ حد آن بینهایت است

سیستم ناپایدار است و همواره $y(\infty)$

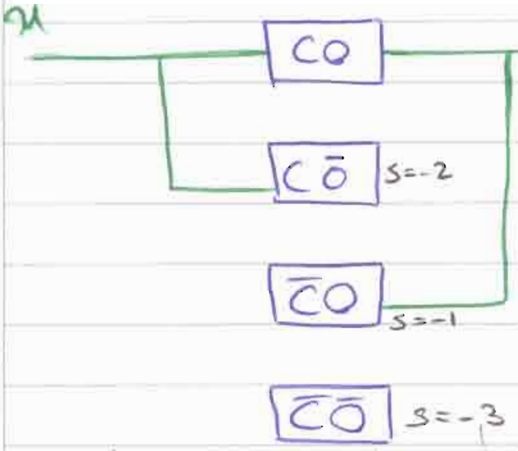
آن مثبت در مثبت.

عکس تبدیل لاپلاس:

روش تجزیه به کسرهای جزئی:

هر سیستمی چهار زیر سیستم دارد، قسمت سیستمی کنترل پذیر است یعنی به ورودی وصل است

وقتی که هم رویت پذیر است یعنی به خروجی فرمان می‌دهد



سیستمی که هم کنترل پذیر است و هم رویت پذیر قطب‌ها و مقادیر ویژهٔ آن یکی است.

حذف صفر و قطب ندارد.

مثال)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+4}$$

نکته: اگر سیستم مرتبه n باشد فضای حالت آن را بیشتر از

n بیاوریم یعنی همهٔ آن‌ها کنترل ناپذیر و رویت ناپذیرند به بیان دیگر اگر فضای

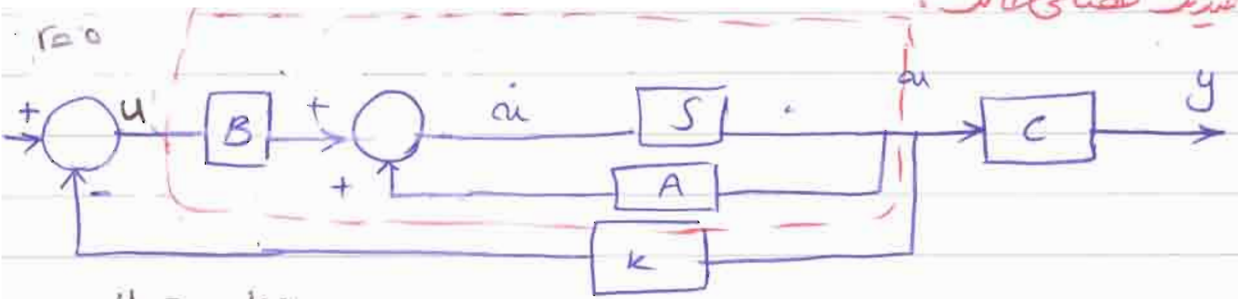
حالت مرتبه n ، سیستمی n باشد قطعاً کنترل پذیر و رویت پذیر است پس حذف

صفر و قطب ندارد یعنی تحقق مینیمال دارد.

نکته:

اگر سیستمی حذف صفر و قطب داشته باشد و تحقق کنترل پذیر بدهیم حتما رویت ناپذیر می شود و یا اگر تحقق رویت پذیر بدهیم حتما کنترل ناپذیر می شود

فیدبک فضای حالت:



$u = -kx$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = Ax + Bu \\ u = -kx\end{array}\right\} \rightarrow \dot{x} = Ax - Bkx$$

$$\dot{x} = (A - Bk)x$$

یعنی همه u در همه stat ها تاثیر بگذارند

یعنی کنترل پذیر

پس شرط طراحی فیدبک حالت آن است که سیستم کنترل پذیر باشد یعنی ورودی در همه حالت ها تاثیر داشته باشد.

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

$$\phi_c = \begin{array}{cc} B & AB \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |\phi_c| \neq 0 \rightarrow$$ کنترل پذیر

پس چون مخالف صفر شد می توان کمک فیدبک حالت تعریف کرد.

$$u = -kx \longrightarrow \boxed{\dot{x} = (A - Bk)x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

BERKEH

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3-k_1 & -2-k_2 \end{bmatrix}}^{A_{new}} x$$

می‌خواهیم قطب‌ها به -2 و -3 منتقل شوند

$$\rightarrow |\lambda I - A_{new}| = (\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

$$\rightarrow |\lambda I - A_{new}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -3+k_1 & \lambda+2+k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \underbrace{(2+k_2)}_{5}\lambda + \underbrace{(-3+k_1)}_{6}$$

$$\rightarrow \boxed{k_2 = 3} \rightarrow \boxed{k_1 = 9}$$

مثال) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ $\quad \lambda = -2, -0.5$

این سیستم کنترل پذیر نیست.

$\lambda_d = -3, -4 \rightarrow$ محل قطب‌ها مطلوب

$$\dot{x} = (A - Bk)x = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -k_1 & -0.5-k_2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A_{new}| = (\lambda+3)(\lambda+4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12$$

$$|\lambda I - A_{new}| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ k_1 & \lambda+0.5+k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2.5+k_2)\lambda + 2k_2$$

$2.5 + k_2 = 7 \longrightarrow k_2 = 4.5$ $\times$

$2k_2 = 12 \longrightarrow k_2 = 6.5$

برای k_2 مقدار متفاوت بدست آمد

پس دیدیم که کنترل ناپذیری در تناقض بدست آمدن k مشاهده می‌شود.

پس کنترل پذیری به هدف کنترل که ناپایدار باشد مناسب نیست در سیستم فیدبک می‌کنیم

مهم: جای قطب‌ها را عوض کرد ولی این خیلی بد نیست چون قطب‌ها سیستم فیدبک در جای

Year Month Date ( )

خاصی مقدار دارد. این زمانی درست که سیستم کنترل ناپذیر باشد و عدم کنترل پذیری آن یعنی

قطب های آن کدام سمت است باشد بسیار مهم است که ناپایدار پذیر است.

امکان دارد برای سیستمی که کنترل ناپذیر است فیدبک حالت تعریف کرد؟ ممکن است سیستم

کنترل ناپذیر باشد ولی باز هم بتوان برای آن فیدبک حالت تعریف کرد باید به قطبی که عدم کنترل پذیری دارد کار

نداشته باشیم.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad \lambda = -2, 0.5 \;\downarrow\; \lambda_d = -2, -4$$

$$\rightarrow |\lambda I - A_{new}| = (\lambda+2)(\lambda+4) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$$

$$\rightarrow |\lambda I - A_{new}| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ k_1 & \lambda+0.5+k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\underbrace{2.5+k_2}_{6})\lambda + \underbrace{2k_2+1}_{8}$$

$k_2 = 3.5 \quad \forall k_1$

دلیلش به -2 به خاطر اینکه عدم کنترلی ندارد کاری نداریم

داشته -2 خودش سمت چپ هم هست. 0.5 عدم کنترلی داشت و ناپایدار بودیم از طریق فیدبک حالت

جابجا کردیم پایدار شد. بین در اینجا سیستمی کنترل ناپذیر را با فیدبک حالت پایدار کنترل پذیر کردیم.

سوال 17 - ورق 82:

کار نداشته باشیم

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad u = -kx$$

قطب را به -8 و -1 می‌بریم، k را پیدا کنید. اشتباه نشود این سیستم کنترل پذیر است اگر

به شرطی که کنترل ناپذیر است کار نداشته باشیم.

$$\boxed{k_2 = 8}$$

BERKEH

Year. Month. Date. ( )

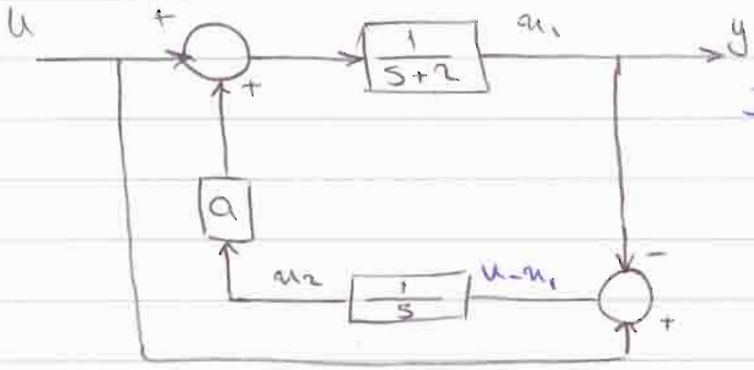
$$A - BK = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A_{new}| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ k_1 & \lambda + k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k_2 + 1)\lambda + k_2 = 0$$

$$= \lambda^2 + 9k + 8 \Rightarrow \boxed{k_2 = 8}$$

$$\rightarrow \underbrace{(\lambda+1)(\lambda+8)}_{\text{سوال داده}}$$

برق 85 - سوال 63 :



به ازای $a=3$ فضای حالت را بیابید.

$$\boxed{y = x_1} \longrightarrow C = [1 \quad 0]$$

$$(U - x_1)\frac{1}{s} = x_2 \xrightarrow[\text{حوزه زمان}]{\text{طرفین وسطین}} \boxed{\dot{x}_2 = u - x_1}$$

$$(U + 3x_2)\frac{1}{s+2} = x_1 \xrightarrow[\text{"}]{\text{"}} \dot{x}_1 + 2x_1 = 3x_2 + u$$

$$\longrightarrow \boxed{\dot{x}_1 = 3x_2 + u - 2x_1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

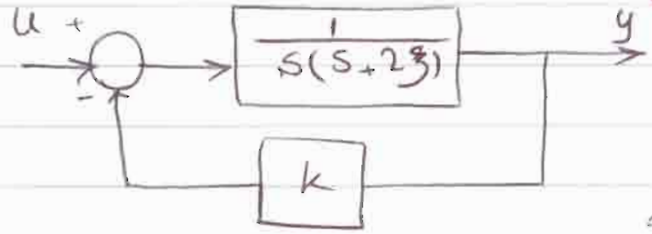
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0]$$

سؤال ۱۹۸ـ برق ۸۸:



$e = u - y$

$\dot{x} = Ax + Bu$

$e = c^T x + du$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -2\xi \end{bmatrix} \qquad c^T = ? \qquad d = ?$

$\frac{y}{u} = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + k} \longrightarrow \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array}$

$\rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -2\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [1 \quad 0]\,x$

$\xrightarrow{e = u - y}$ $u - y = c^T x + du \rightarrow y = -c^T x + [1 - d]u$

$1 - d = 0 \rightarrow \boxed{d = 1}$ $\qquad \boxed{C = [1 \quad 0]}$

$\boxed{-c^T = [-1 \quad 0]}$

سؤال ۱۹۹ـ برق ۸۸

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [1 \quad 1 \quad -1]\,x$

$z = \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \qquad z = Px \qquad P = ?$

سؤال کتاب مانند زیر است.

$$z_1 = 1\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3$$

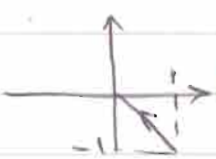
$$y = z_2 = 1\,x_1 + 1\,x_2 + (-1)\,x_3$$

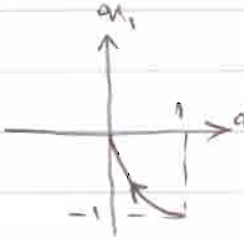
$$\dot{y} = z_3 = 1\,\dot{x}_1 + 1\,\dot{x}_2 + (-1)\,\dot{x}_3 = \underbrace{x_1 - 2x_2 + 0\,x_3}_{\text{از روی } \dot{x} \text{ بدست آوردیم}}$$

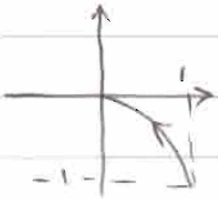
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

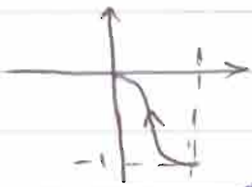
سؤال 87، برق 86:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; u = 0$$









وقتی ورودی صفر است یعنی شرط اولیه $x(0)$ سیستم را فعال کرده است. سیستم پایدار است چون فضای حالت آن به فرم کنترل پذیر است پس باید همه شکل ها به سمت صفر رود.

$$sX(s) - x(0) = A\,X(s)$$

$$(sI - A)\,X(s) = x(0) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}\,x(0)$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+3}\begin{pmatrix} s+3 \\ -s-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow x_1(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow x_1(t) = e^{-t} \\ &x_2(s) = \frac{-1}{s+1} \rightarrow x_2(t) = -e^{-t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{x_1 = -x_2}$$

اگر شرایط اولیه را در راستای بردار ویژه قرار دهیم، مقدار ویژه متناظر با آن بردار ویژه تکرار می‌شود و مسیر یک خط راست در راستای بردار ویژه می‌شود.

تعریف خطا

$$\boxed{e = u - y} \rightarrow E(s) = U(s) - Y(s) = (1 - T(s))U(s)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{ss} = Ax_{ss} + Bu_{ss} & (1) \\ y_{ss} = Cx_{ss} \end{cases} \qquad T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

فرض کنیم ورودی پله باشد $\rightarrow$ $u = u_s(t) = 1 \quad \forall t > 0$: حالت ایدآل

$\mathrm{Re}\,\lambda(A) < 0 \rightarrow A$ is Hurwitz

$$x_{ss} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}}_{W} \rightarrow \dot{x}_{ss} = 0$$

$$(1) \rightarrow 0 = AW + B \rightarrow \boxed{W = -A^{-1}B}$$

$$\boxed{y_{ss} = CW = -CA^{-1}B}$$

$$e_{ss} = u_{ss} - y_{ss} \longrightarrow \boxed{e_{ss} = 1 + CA^{-1}B}$$

اگر ورودی شیب باشد :

حالت دوم $\quad u = t\,u_s(t) = t \quad \forall\, t > 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_{ss} = A x_{ss} + B u_{ss} \quad (1) \\ y = C x_{ss} \end{cases}$$

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} t w_1 + v_1 \\ \vdots \\ t w_n + v_n \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\dot{x}_{ss} = w}$$

ورودی شیب

$$(1) \rightarrow w = A(wt + v) + Bt$$

$$\rightarrow \begin{cases} Aw + B = 0 \longrightarrow w = -A^{-1}B \\ Av = w \longrightarrow v = A^{-1}B \longrightarrow v = -(A^{-1})^2 B \end{cases}$$

$$e_{ss} = u_{ss} - y_{ss} \qquad e_{ss} = t - Cx_{ss} = t - C(wt + v)$$

$$\rightarrow \boxed{e_{ss} = (1 + CA^{-1}B)\,t + C(A^{-1})^2 B}$$

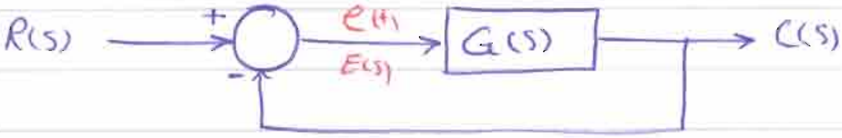
جلسه هشتم ۹۰/۶/۱۱

$$\dot{x} = A(t)x \longrightarrow x(t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau} x(0)$$

از این فرمول زمانی استفاده می‌شود که A عدد ثابت نباشد. که در این صورت تابعی انتگرالی می‌شود.

مثال)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تعریف خطا:



(error) : E(s) ، e(t)

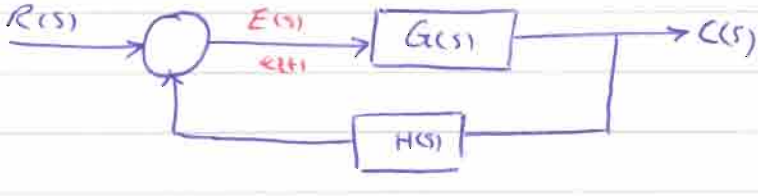
$\forall t > 0$

تعریف خطا $E(s) = R(s) - C(s)$ ← این تعریف اسمی خطا است

$e(t) = R(t) - C(t)$

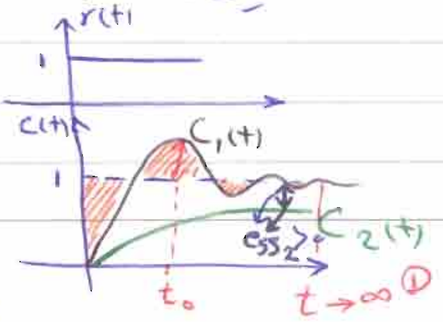
error را هدف سیستم تعریف کند یا بعضی خروجی

نگاه کنیم و مدل نزنیم. فرض کنیم که فیدبک واحد به سیستم داریم:



$E(s) = R(s) - C(s)H(s)$

حال فرض کنیم فیدبک واحد نباشد، آن را به واحد تبدیل می‌کنیم.



تمام قسمت‌های هاشور خطا است (خطا مثبت است) (در بعضی جاها)

e_{ss_2} خطای خروجی $c_2(t)$ است که مثبت است.

Year. Month. Date. ( )

① $e_{ss_1} = 0 \longrightarrow$ یعنی خطای حالت ماندگار صفر یا ثابت

$$e(\infty) = e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

اگر خطا دارای مقدار منفی باشد یعنی خروجی از ورودی بالاتر است یعنی بیشینه است و

اگر این مقدار مثبت باشد یعنی خروجی از ورودی کمتر است. بیشتر در عمل این مقدار مثبت زیرا

مقدار تلفات اتفاق می‌افتد.

در عمده دارند سیستم پاسخ یک سیستم مرتبه اول است.

حالت دائمی هر پارامتری را بخواهید: باید پایدار باشد یعنی قطب‌ها سمت چپ باشند.

F.V.T

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \qquad E(s) = R(s) - C(s)$$

$$E(s) = R(s) - R(s)\,T(s)$$

$$E(s) = \underbrace{\left(1 - T(s)\right)}\, R(s) = W_e(s)\,R(s)$$

یعنی خطا یک چیزی وزن دار از ورودی است. $\longleftarrow W_e(s)$

رابطه در حیطه لاپلاس است.

$$e(t) = W_e(t) * r(t)$$

عکس لاپلاس:

این رابطه خطا را در همه لحظات می‌دهد نه فقط در زمان S.S

دقت داشته باشید که این فرمول از روی $e(t) = r(t) - c(t)$ بدست آمد یعنی حالتی که فیدبک نداشتیم.

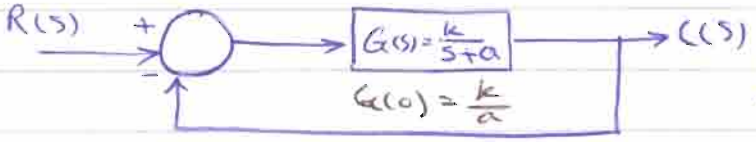
$$E(s) = \left(1 - \frac{G(s)}{1+G(s)}\right) R(s)$$

این رابطه برای زمانی است که

$$\boxed{E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)}$$

۱) فیدبک واحد باشد ۲) خطا ورودی - خروجی باشد.

شرط دوم همیشه برقرار است. اگر فیدبک واحد نباشد آن را به واحد تبدیل می‌کنیم.



Order ← مرتبه ← توان مخرج تابع تبدیل

Rank ← رتبه

Type ← نوع

$r_1(t) = t^0 u(t) = \frac{1}{s}$ → پله

$r_2(t) = t^1 u(t) = \frac{1}{s^2}$ → شیب

$r_3(t) = t^2 u(t) = \frac{1}{s^3}$ → شتاب

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

ورودی های مقابل را به سیستم می‌دهیم:

$\xrightarrow{R_1(s) = 1/s}$ $E_1(s) = \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s} \longrightarrow e_{1ss} = \frac{1}{1+G(0)} = \boxed{\frac{a}{a+k}}$

a و k مثبت است پس کل عبارت مثبت است زیرا اگر منفی فرض کنیم ممکن سیستم ناپایدار شود. $G(0)$ یعنی

بهره حالت DC است.

اگر بخواهیم بهره DC غیر صفر داشته باشیم باید

قطب خالص در مخرج باشد. اگر بهره DC صفر داشته باشیم صفر در مبدا داریم. در واقع بهره DC ورودی یعنی

قطبی در مبدا نداریم.

$\xrightarrow{R_2(s) = \frac{1}{s^2}}$ $E_2(s) = \frac{1}{1+G(s)} \times \frac{1}{s^2} \Rightarrow e_{2ss} = \infty$

$\xrightarrow{R_3(s) = 1/s^3}$ $E_3(s) = \frac{1}{1+G(s)} \times \frac{1}{s^3} \Rightarrow e_{3ss} = \infty$

← چون $G(0)$ محدود است حد محدود $\times \frac{1}{0} = \infty$ می‌شود.

نکته: وقتی error یک عدد ثابت است یعنی خروجی از ورودی به مقدار error فاصله دارد.

و error=0 می‌شود یعنی خروجی برابر ورودی ایستاده است.

* error=∞ است یعنی خروجی از ورودی دور می‌شود یا به عبارت در خلاف جهت ورودی است.

زمانی که کنترلر سیستم فیدبک دارد را زیاد کنیم خروجی به ورودی نزدیک می‌شود. $\downarrow e = \frac{a}{a+k\uparrow}$

k بهره سیستم فیدبک‌دار است. یعنی کاهش خطا و یعنی ردیابی بهتر ورودی به خروجی

البته این کار پایداری را زیر سؤال می‌برد. راه دیگر زمانی است که $a=0$ بشود. $\frac{k}{s+a}$, $a=0$

سیستم قطب در مبدا پیدا می‌کند. یعنی اگر بخواهیم خطای حالت دائمی به ورودی پله صفر باشد

باید حتما یک قطب در مبدا داشته باشیم. خطای حالت دائمی به ورودی پله در این سیستم

عدد ثابت خواهد شد: یعنی قطب در مبدا نداشتیم:

سیستم type

$$r_1(t) = t^0\, u(t) \quad \text{و} \quad G(s) = \frac{k}{s^0(s+a)} \longrightarrow e_{ss} = \frac{a}{a+k} \neq 0$$

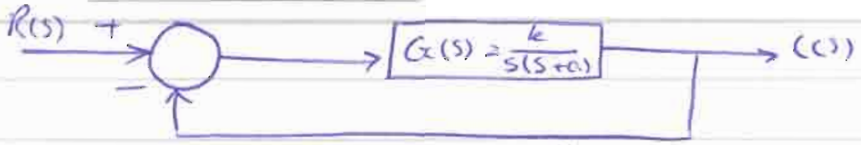
سیستم type ← ، type 0

تعداد s های خالص در مخرج (قطب در مبدا) تابع تبدیل حلقه باز.

تعریف جدید type: توان ورودی در حوزه زمان است که به ازای آن ورودی خطا عدد ثابت

(محدود) و خلاف صفر می‌شود. پس type هرچی که باشد اگر توان ورودی زیاد شود خطا بی‌نهایت

می‌شود.



بهره DC در این سیستم ∞ می‌شود. یعنی زمانی که بهره DC بی‌نهایت می‌شود یعنی حداقل یک قطب در مبدأ داریم. عکس صادق نیست یعنی:

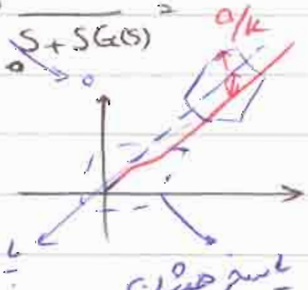
اگر سیستم قطب در مبدأ داشته باشد قطعاً بهره DC بی‌نهایت نمی‌شود ممکن است صفر در مبدأ هم داشته باشیم. حال ورودی‌های مختلف را به این سیستم هم می‌دهیم.

$$\xrightarrow{R_1(s)} E_1(s)=\frac{1}{1+G(s)}\times\frac{1}{s}\longrightarrow e_{1ss}=\frac{1}{1+G(0)}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

یعنی خروجی در بی‌نهایت ورودی را دنبال می‌کند. یعنی روی هم می‌افتد. وقتی یک قطب در مبدأ به سیستم اضافه کردیم این اتفاق افتاد.

$$\xrightarrow{R_2(s)=1/s^2} E_2(s)=\frac{1}{1+G(s)}\times\frac{1}{s^2}\Rightarrow \lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)}=\frac{a}{k}$$

$$\rightarrow \lim=\frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}=\frac{1}{\lim_{s\to 0} s\frac{k}{s(s+a)}}=\boxed{\frac{a}{k}}$$



پاسخ خصوصی ← خروجی شبیه ورودی (ورودی شیب است).

پاسخ همگن

این سیستم به $t\,u(t)$ خطای محدود خلاف صفر داد.

$r(t)=t\,u(t)$ و $G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$

type 1 است   type 1 است.

اگر این جا $a=0$ کنیم دو تا قطب در مبدأ داریم می‌خواهیم خطا صفر شود. نمی‌شود چون خیلی زیاد کوچک بشود ناپایدار

BERKEH

Year. Month. Date. ( )

پیش می‌آید. در این سیستم‌ها این طور بررسی می‌شود که توان ورودی هر چه باشد. اگر (۱ + توان)

در مبدا قطب داشته باشیم ورودی ردیابی می‌شود.

$r(t) = t^0 u(t)$ و $G = \frac{k}{s+a}$ $\longrightarrow$ اگر ۱ قطب در مبدا داشته باشیم

$r(t) = t^1 u(t)$ و $G = \frac{k}{s(s+a)}$ $\longrightarrow$ " دو قطب در مبدا " "

ورودی ردیابی می‌شود.

$R_1(s) = \frac{1}{s}$

$R_2(s) = \frac{1}{s^2}$

$\longrightarrow$ یعنی اگر می‌خواهیم ورودی را ردیابی کنیم

در حوزه لاپلاس باید یکی از لاپلاس ورودی در open loop ببینیم.

اگر $a=0$ بگذاریم در مخرج s^2 را می‌بینیم.

همه این مطالب برای زمانی صادق است که سیستم پایدار باشد.

$R_3(s) = \frac{1}{s^3}$

$$E_3(s) = \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^3} \longrightarrow e_{3ss} = \frac{1}{0 + \lim\limits_{s \to 0} s^2 G(s)} = \infty$$

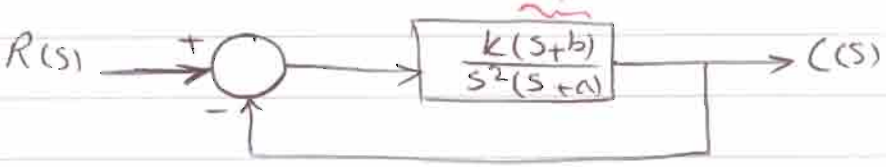
پس سیستم type هر چه باشد به مثل خود خطای صفر و به بعد خود

خطای بی‌نهایت می‌دهد. اگر type یک باشد یعنی یک پس به پله خطای صفر به

شتاب خطای بی‌نهایت می‌دهد type برای ورودی‌های خطی واقعاً تعریف می‌شود.

اگر سیستم type 2 باشد به شیب خطای صفر می‌دهد. به $t^2u(t)$ عدد ثابت می‌دهد به $t^3u(t)$ بی‌نهایت می‌دهد

اگر a نبود سیستم ناپایدار است



$R_1(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow e_{1ss} = 0$

$R_2(s) = \frac{1}{s^2} \longrightarrow e_{2ss} = 0$

$R_3(s) = \frac{1}{s^3} \longrightarrow e_{3ss} = \boxed{\frac{a}{kb}}$ ← خطای محدود مخالف صفر

برای اینکه خطا صفر شود $a=0$ پس آن صفری که قرار است در ورودی دنبال شود در open loop ظاهر می‌شود یعنی $\frac{1}{s^3}$ پس سیستم type ۳ است.

ورودی \ type نوع	نوع صفر	نوع 1	نوع دو
پله واحد: $r(t)=t^0u(t)$ $R(s)=1/s$	$e_{ss}=\frac{1}{1+k_p}$ $k_p\neq0, k_v=0, k_a=0$	صفر $k_p=\infty$	صفر $k_p=\infty$
شیب واحد: $r(t)=t\,u(t)$ $R(s)=1/s^2$	∞	$\frac{1}{k_v}, k_v\neq0$	صفر $k_v=\infty$
$r(t)=t^2u(t)$ $R(s)=1/s^2$	∞	∞ $k_a=0$	$\frac{1}{k_a}$ $k_a\neq0$

BERKEH

ثابت خطای موقعیت (ورودی پله)

$$\boxed{\lim_{s\to 0} G(s) = k_p} \qquad \boxed{\lim_{s\to 0} s\,G(s) = k_v}$$

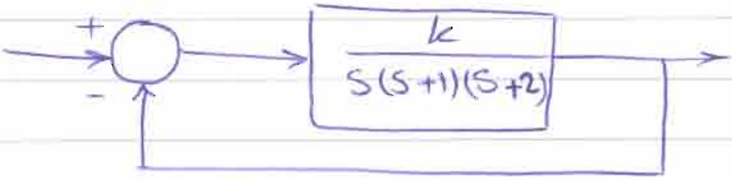
ثابت خطای سرعت (ورودی شیب)

$$\boxed{\lim_{s\to 0} s^2 G(s) = k_a}$$

ثابت خطای شتاب (ورودی سهمی)

(این سؤال خیلی تکرار شد)

سؤال سراسری ۸۱:



یک s درمخرج = تایپ ۱

$$e_{ss}\Big|_{u(t)} = 0 \qquad e_{ss}\Big|_{t^2 u(t)} = \infty$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \frac{k}{2}$$

$$e_{ss}\Big|_{t\,u(t)} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\frac{k}{2}} = \boxed{\frac{2}{k}}$$

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k$$

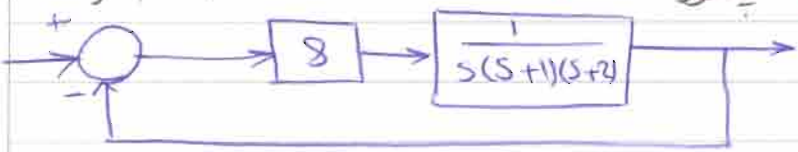
حداقل خطای حالت ماندگار به ورودی شیب؟

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & \frac{6-k}{3} > 0 & \\ s^0 & k > 0 & \end{array} \longrightarrow \boxed{0 < k < 6} \longrightarrow$$

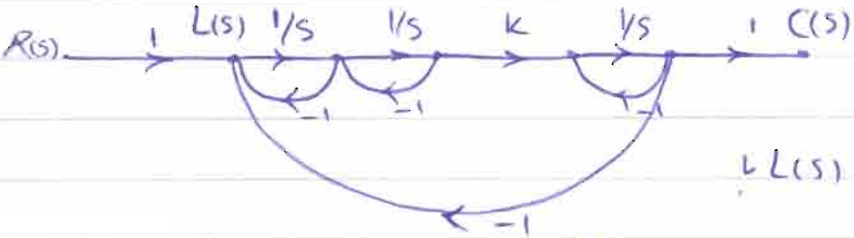
سیستم پایدار می‌شود

$$e_{ss} = \frac{2}{k} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

اتوماسیون ۸۹، سؤال ۲۵۱:



برق 98 - سؤال 245:



آیا $E(s)=R(s)-C(s)$ با $L(s)$

$E(s)$ برابر است؟ خطا به ازای $0<k<6$ چه؟ (ورودی شیب)

$E(s) \neq L(s)$

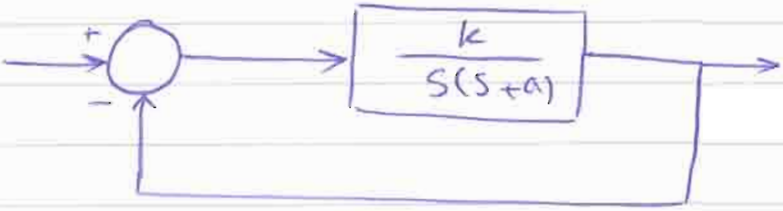
$$T(s)=\frac{\frac{k}{s^3}}{1-\left(-\frac{1}{s}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s}-\frac{k}{s^3}\right)+\left(-\frac{1}{s}\times-\frac{1}{s}+\frac{-1}{s}\times\frac{-1}{s}\right)}$$

$$\longrightarrow T(s)=\frac{k}{s^3+3s^2+2s+k} \longrightarrow G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

$$e_{ss}=\frac{2}{k}\ ,\quad 0<k<6$$

$$\longrightarrow \boxed{e_{ss}>\frac{1}{3}}$$

سؤال 33 - برق 83 : حساسیت ~~حالت~~ خطای دائمی به ورودی شیب واحد کدام است؟



$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{a}{k}$$

$k>0$ و $a>0$ شرایط پایداری است.

حساسیت k	حساسیت a
1	1
−1	1 ✓
1	−1
−1	−1

$$\boxed{k_v = \lim_{S\to 0} S\,G(S) = \frac{k}{a}}$$

حساسیت

$$\boxed{S^{e_{ss}}_{a} = \frac{\partial e_{ss}}{\partial a}\times\frac{a}{e_{ss}} = \frac{1}{k}\times\frac{a}{\frac{a}{k}} = 1}$$

$$\boxed{S^{e_{ss}}_{k} = -1}$$

برق 83 - سؤال ~~87~~ 37

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - a x_2 + 2u$$

$$y = x_1 \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(S) = \frac{2}{S^2 + aS + 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

کاملاً کنترل پذیر

$$\boxed{e_{ss} = (1 + CA^{-1}B) = 0}$$

$$G(S) = \frac{2}{S(S+a)} \longrightarrow$$ سیستم تایپ 1 است

$$k_v = \lim_{S\to 0} S\,G(S) = \frac{2}{a} \rightarrow \boxed{e_{ss} = \frac{a}{2} \quad a>0}$$

شرط پایداری

برق 87 سؤال 130 :   u: ورودی   y: خروجی $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ بردار حالت. خطای ماندگار

$u(t) - y(t)$ به ورودی شیب واحد؟ (مثل سؤال قبل)

سؤال 8 ، 7 برق 86 :

$G(s) = \dfrac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ تابع تبدیل حلقه بسته است. ثابت خطای استاتیکی به ورودی شیب واحد؟

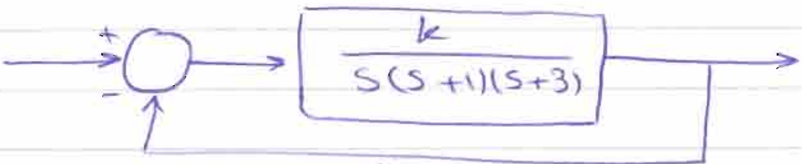
۱) $k_v = \frac{3}{5}$ ۲) $k_v = \frac{5}{6}$ ۳) $k_v = \frac{5}{3}$ ۴) $k_v = \frac{6}{5}$

$$G(s) = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{s+6}{s^3+6s^2+\underbrace{11s+6}_{(10s+s+6)}}$$

حلقه باز $\quad G_p = \dfrac{s+6}{s(s^2+6s+10)} \longrightarrow k_v = \dfrac{6}{10} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$

$$G_p = \frac{A}{B} \quad , \quad G_s = \frac{G_p}{1+G_p} \rightarrow G_s = \frac{A}{A+B}$$

برق 86، سؤال 82 :



k را چنان تعیین کردیم که -3.5 مقدار ویژه سیستم است. خطای ماندگار به $(2t+0.5)u(t)$ ؟

یعنی -3.5 قطب حلقه بسته است. $\quad \Delta(s) = s(s+1)(s+3) + k$

$$\Delta(\underset{-3.5}{-\tfrac{7}{2}}) = 0 \rightarrow = \left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + k \rightarrow k = \frac{35}{8}$$

$(2t + \cancel{0.5})u(t)$

مقدار خطا صفر می‌شود چون اثر $+0.5$ است به ورودی پله صفر شود

BERKEH

$$C_3 = \frac{1}{(3-3)!} \frac{d^{3-3}}{d^{3-3}} \left(\frac{s+2}{s+3}\right)\Big|_{s=-1}$$

$$C_2 = \frac{1}{(3-2)!} \frac{d}{ds} \left(\frac{s+2}{s+3}\right)\Big|_{s=-1}$$

$$C_1 = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}} \left(\frac{s+3}{s+3}\right)\Big|_{s=-1}$$

حالت سوم: ریشه مختلط

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+5} = \frac{(s+2)-1}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$\rightarrow e^{-2t}\cos t - 2t\sin t$$

محاسبه تابع تبدیل از روی معادله دیفرانسیل: Zero state

$$y'' + 3y' + 2y = u'(t) + 4u(t)$$

$$s^2 y(s) - s\,\underset{0}{y(0)} - \underset{0}{y'(0)} + 3\left(y(s)\times s - \underset{0}{y(0)}\right) + 2y(s) = s\,u(s) - \underset{0}{u(0)}$$

$$+4u(s)$$

شرایط اولیه را صفر در نظر میگیریم.

$$(s^2+3s+2)\,y(s) = (s+4)\,u(s) \rightarrow \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+4}{s^2+3s+2}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} \longrightarrow \qquad k_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{k}{3}$$

$$= \frac{1}{\frac{k}{3}} = \frac{3}{k} = \frac{3}{\frac{35}{8}} = \boxed{\frac{48}{35}}$$

پس چون type1 است به پله خطای صفر دارد و به شتاب خطای بی‌نهایت دارد.

برق ۹۰ - سؤال 270 :

k_p و k_d را چنان بیابید که خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد ۰٫۵ و پاسخ گذرای سیستم میرای بحرانی شود. مجهول k_p ، k_d .

$$G(s) = \frac{k_p + k_d s}{s(s+2)} \longrightarrow \text{تایپ } 1$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{k_p}{2}$$

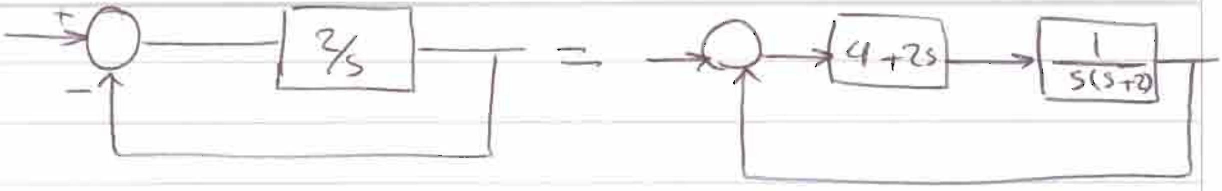
$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = 0.5 \longrightarrow e_{ss} = \frac{2}{k_p} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{k_p = 4}$$

$$T(s) = \frac{k_p + k_d s}{s^2 + (2+k_d)s + \underset{4}{k_p}} = \frac{\overset{4}{k_p} + k_d s}{s^2 + (2+k_d)s + 4}$$

میرای بحرانی یعنی ریشه مضاعف داشته باشد ← فرم مربع کامل باشد.

$$\text{if } k_d = 2 \longrightarrow \qquad \Delta(s) = (s+2)^2$$

Year Month Date (۱)



وقتی $k_d = 2$ و $k_p = 4$ شود سیستم به صورت ایست داده شده به شکل (۱) می‌شود

بنابراین سیستم مرتبه (۱) می‌شود. با سیستم مرتبه (۱) میرایی معنی ندارد پس باید زمینه‌ی

چنین k_p را نمی‌توان طوری بردار انتخاب کنیم.

اتوماسیون ۸۹: سؤال ۱۲۵۰

$$T(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + k}$$ حلقه بسته با فیدبک منفی واحد.

۱) به ورودی شیب خطای ماندگار ثابت می‌دهد.

$k>0$

۲) مرتبه ۲ است و برای $k \in (\cancel{0},\infty)$ همواره k پایدار است. X

۳) از روی حلقه بسته: نوع سیستم را نمی‌توان یافت. X غلط

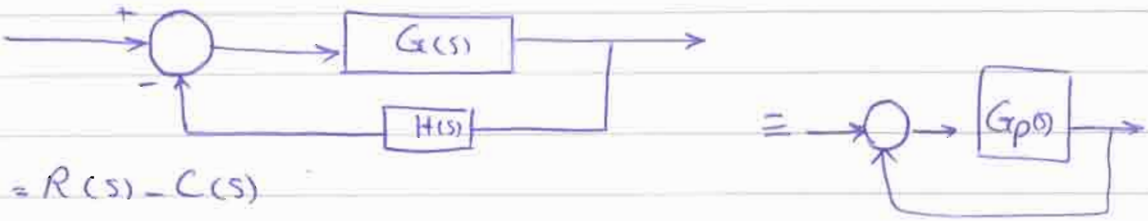
۴) چون نوع ~~۱~~ است، خطا به پله واحد مقداری ثابت است.

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s} = \frac{k}{s(s+2\zeta\omega_n)} \longrightarrow \underline{\text{type 1}}$$

$$\text{if } k>0 \quad e_{ss}\Big|_{r(t)} = \frac{2\zeta\omega_n}{k}$$

BERKEH

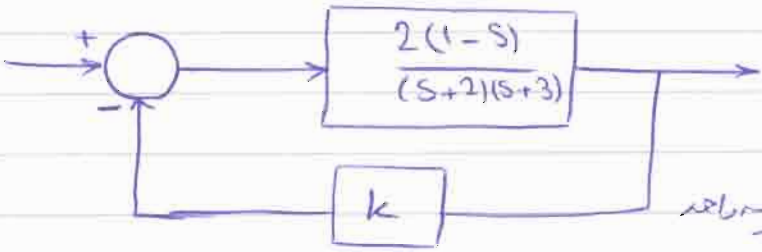
محاسبه خطا در حالت فیدبک غیر واحد



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$T(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G(s)H(s)} \qquad G_p(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s) - G(s)}$$

$$\longrightarrow T(s) = \frac{G}{1 + GH}$$



برگه 33 - سوال 189:

می‌خواهیم خطا به ازای پله واحد $e(t) = r(t) - c(t)$

صفر شود. یعنی باید تایپ سیستم ۱ باشد. اول باید فیدبک واحد شود بعد تایپ مشخص شود:

$$G_p(s) = \frac{\dfrac{2(1-s)}{(s+2)(s+3)}}{1 + \dfrac{2k(1-s)}{(s+2)(s+3)} - \dfrac{2(1-s)}{(s+2)(s+3)}} =$$

تابع تبدیل حلقه باز با فیدبک واحد

$$\longrightarrow G_p(s) = \frac{2(1-s)}{(s+2)(s+3) + 2(1-s)(k-1)} \longrightarrow \text{مخرج حلقه باز}$$

باید k را طوری انتخاب کنیم که تایپ ۱ شود یعنی بتوان از یک s فاکتور گرفت.

$$e_{ss}\Big|_{u(t)} = \frac{1}{1 + \underset{\infty}{k_p}} = 0 \qquad k_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{2}{6 + (k-1)2} = \frac{2}{4 + 2k}$$

$$k_p\Big|_{\infty} \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

Year Month Date ( )

و $k=-2$ شود قطب مثبت می‌شود. پس سیستم زمانی ورودی را دنبال می‌کند که قطب مثبت شود.

پس k می‌تواند منفی باشد.

مخرج حلقه باز $\rightarrow \; = S^2 + (5-2k+2)S + \underbrace{6+2k-2}_{(1)}$

برای اینکه سیستم type1 شود باید ثابت از s فاکتور گرفت یعنی $(1)=0$

$$\rightarrow 6+2k-2=0 \rightarrow 2k=-4 \rightarrow \boxed{k=-2}$$

$$\rightarrow G_p(s)\Big|_{k=-2} = \frac{2(1-s)}{s(s+11)}$$

$$e_{ss}\Big|_{r(t)} = \frac{11}{2} \quad = \lim_{s\to 0} s\,G_p(s) = \frac{2}{11} = k_v \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \boxed{\frac{11}{2}}$$

$$\text{if } k \neq -2 \xrightarrow{\text{type0}} k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{2}{4+2k}$$

$$\rightarrow e_{ss}\Big|_{u(t)} = \frac{1}{1+\frac{2}{4+2k}} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{4+2k}{6+2k}$$

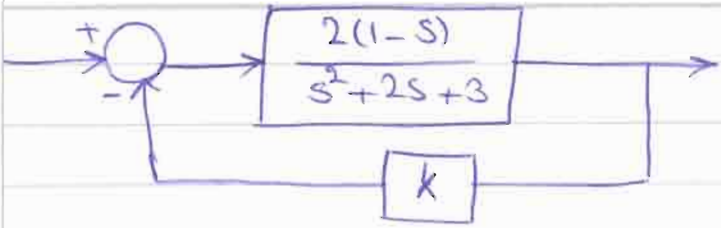
اگر $k=-3$:

مخرج حلقه باز : $=(S^2+13S+2) \xrightarrow[\text{حلقه بسته می‌شود}]{+\text{صورت } G(s)}$

$$\Delta p(s) = S^2+13S-2+2-2S \Rightarrow$$

یعنی سیستم به ازای $k\neq -2$ ← نوع صفر است به ازای $k=-2$ ← نوع یک است.

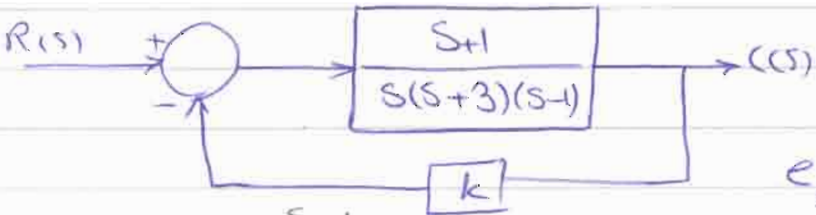
BERKEH



برق 89 : سوال 236 :

صورت سوال مانند قبل است. حل شود.

$$\boxed{k = -\frac{1}{2}}$$



اتوماسیون 89 _ 253 :

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} \left(r(t) - c(t) \right)$$

$$G_p(s) = \frac{\dfrac{s+1}{s(s+3)(s-1)}}{1 + \dfrac{k(s+1)}{s(s+3)(s-1)} - \dfrac{s+1}{s(s+3)(s-1)}} = \frac{s+3}{s(s+3)(s-1) + (k-1)(s+1)}$$

$$G_p(s) = \frac{s+1}{s^3 + (2)s^2 + (-3+k-1)s + k-1}$$

تابع تبدیل حلقه باز را بنویسید

منفی واحد.

$$\text{if } k=1 \xrightarrow{\text{type}=1} e_{ss}\Big|_{r(t)} = \boxed{-3}$$

$$\text{if } k\neq 1 \xrightarrow{\text{type}=0} e_{ss}\Big|_{u(t)} = \frac{1}{1+\frac{1}{k-1}}$$

بررسی گزینه ۴: همه گزینه ها رد شد. گزینه ی نقطه $\underline{k = 6}$ هم پایداری نوسانی :

$$k=6 \longrightarrow G_p(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s+5}$$

$$\longrightarrow T(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+3s+6} \longrightarrow$$

s^3	1	3
s^2	2	6
s^1	$\cancel{0}$ 4	
s^0	6	

$$p(s) = 2s^2+6=0$$

$$\frac{dp}{ds} = \boxed{4}$$

$$\boxed{s = \pm j\sqrt{3}}$$

$$f_r = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

پایداری نوسانی

پس گزینه ۲ صحیح است.

سوال 203: یک خطا از روی $\underline{A, B, C}$ بسیار مهم است.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

خطای ماندگار به ورودی پله واحد؟

$$E(s) = (1-T(s))\,R(s)$$

$$T(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

BERKEH

Year. Month. Date. ( )

$$e_{ss}\Big|_{u(t)} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \boxed{1 + CA^{-1}B}$$

(مهم)

(اگر مقادیر ویژه ماتریس A مثبت شود سیستم ناپایدار است)

$$\longrightarrow e_{ss} = 1 + CA^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & 1 \\ \times & \times & 5 \\ \times & \times & 10 \end{bmatrix}^{-1}_{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \boxed{W}$$

از ماتریس A^{-1} فقط ستون سوم باقی می‌ماند بقیه در صفر ضرب می‌شوند پس فقط ستون سوم را بدست می‌آوریم.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \Rightarrow \begin{cases} |A| = -5(8) + 20 = -20 \\ A^* = N^T \longrightarrow \begin{cases} n_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{1} \\ n_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{5} \\ n_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \boxed{10} \end{cases} \end{cases}$$

$$W = 1 - \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 1 - \frac{1}{20}(4) = \boxed{\frac{4}{5}}$$

مثال: این سیستم را در نظر بگیرید $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ در چه حالتی خطا به ورودی پله واحد صفر می‌شود.

$CA^{-1}B = 2$ $\quad CA^{-1}B = -1$

$CA^{-1}B = 1/2$ $\quad CA^{-1}B = 1$

$$\text{type } 1 \rightarrow 1 + CA^{-1}B = 0$$

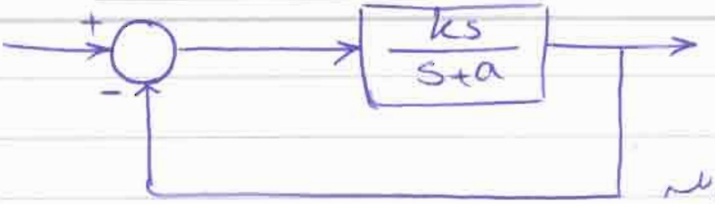
$$\rightarrow \boxed{CA^{-1}B = -1}$$

خطای شیب

$$e_{ss} = (1 + CA^{-1}B)\,t - C(A^{-1})^2 B$$

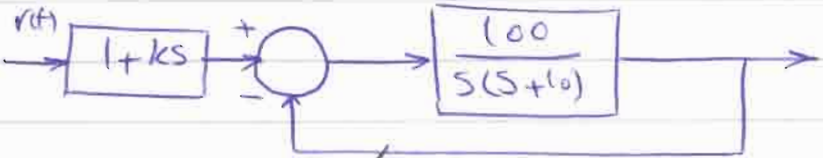
$$\begin{cases} 1 + CA^{-1}B = 0 \quad ① \longrightarrow \text{type}=1 \\ C(A^{-1})^2 = 0 \quad ② \quad ①,② \longrightarrow \text{type}=2 \end{cases}$$

سؤال 66 برق 85:



به ازای چه مقدار a و k خطای پله واحد صفر است؟ هیچ مقدار a و k زیرا این سیستم تحت هیچ شرایطی نوع ۱ نمی‌شود تا خطای آن به پله صفر شود.

سؤال 32 برق 83:



$r(t) = 10t\,u(t)$

k را چنان بیابید که خطا به ورودی داده شده صفر شود. باید کاری کنیم که تایپ دو شود که کنترلر بیرون حلقه اضافه کرده است.

$$E(s) = (1 - T(s))R(s)$$

$$T(s) = (1+ks)\frac{100}{s(s+10)+100} = \frac{100+100ks}{s(s+10)+100}$$

$$= \frac{100+100ks}{s^2+10s+100} \Rightarrow E(s) = (1 - T(s))R(s)$$

$$\rightarrow E(s) = \frac{s^{\cancel{2}} + (10-100k)\cancel{s}}{s^2+10s+100} \times R(\cancel{s}) \quad \frac{10}{s^{\cancel{2}}}$$

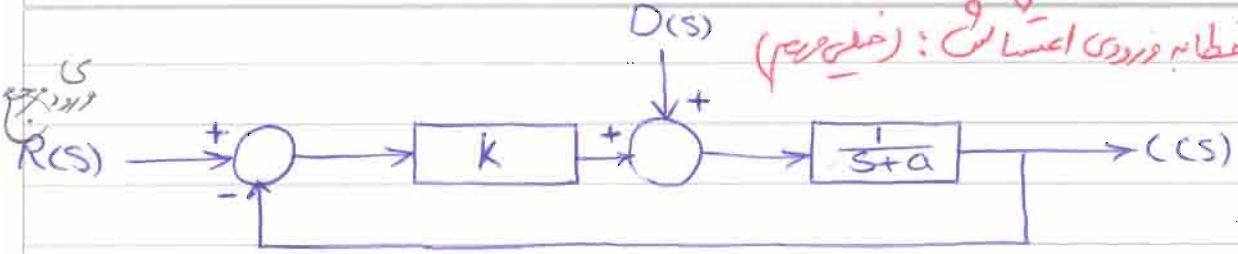
$$e_{ss} = \frac{10-100k}{10\cancel{0}} \times 1\cancel{0} \Rightarrow \text{if } \boxed{k=0.1 \rightarrow e_{ss}=0}$$

سه جلسه هفتم است

ورودی اغتشاش

Year: 90 Month: 4 Date: 12

خطای ورودی اغتشاش: (خطای مرجع)



$$e_{ss}\Big|_{R(s)=\frac{1}{s}} = \frac{1}{1+k_p} = \boxed{\frac{1}{1+\frac{k}{a}}}$$

$$G(s) = \frac{k}{s+a}$$

$$\boxed{G(0) = \frac{k}{a}}$$

هدف این است که در حالت نهایی C(s) به R(s) برسد یعنی خروجی، ورودی را ردیابی کند و خطا صفر شود. آن قسمتی که از پاسخ که ناشی از اغتشاش است ناشی خطای ورودی اغتشاش است

خطای ورودی مرجع $\longrightarrow E_R(s) = R(s) - \overset{T(s)\cdot R(s)}{C(s)} = (1-T(s))R(s)$ در حالت نهایی این خطا صفر شود.

خطای ورودی اغتشاش $\longrightarrow E_D(s) = Y_D(s) = T_D(s)\cdot D(s)$

$$y_{\text{خروجی}}(s) = y_R(s) + y_D(s)$$

$$\frac{y_R(s)}{R(s)} = T_R(s) \longrightarrow y_R(s) = T_R(s)\cdot R(s)$$

$$\longrightarrow \frac{y_D(s)}{\underset{\text{ورودی اغتشاش}}{D(s)}} = T_D(s) \longrightarrow y_D(s) = T_D(s)\cdot D(s)$$

روشی وجود دارد که می‌توان ورودی های اغتشاش را تبدیل به پله کرد. پس خطای ورودی اغتشاش همان خروجی به ازای اغتشاش است.

Year. Month. Date. ( )

$$e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssD}$$

در اینجا باید کاری انجام دهیم که در این خطا صفر شود.

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1/s+a}{1+\frac{k}{s+a}} = \frac{1}{s+a+k} = T_D(s)$$

$$E_D(s) = C(s) = \frac{1}{s+a+k} \cdot D(s)$$

اغتشاش پله $\longrightarrow$ $D(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow E_D(s) = \frac{1}{s+a+k} \cdot \frac{1}{s} \rightarrow \boxed{e_{ssD} = \frac{1}{k+a}}$

اگر $\frac{1}{s+a}$ را در $\frac{1}{s}$ ضرب کنیم: $\frac{1}{s(s+a)}$:

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+a)}}{1+\frac{k}{s(s+a)}} = \frac{1}{s^2+as+k} = T_D(s)$$

$$E_D(s) = C(s) = \frac{1}{s^2+as+k} \cdot D(s)$$

اغتشاش پله $\longrightarrow$ $D(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow E_D(s) = \frac{1}{s^2+as+k} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{e_{ssD} = \frac{1}{k}}$

خوب در اینجا با اضافه کردن $\frac{1}{s}$ به $\frac{1}{s+a}$ خطای ورودی را از بین برد ولی اغتشاش از سیستم

خارج نشد حال $\frac{1}{s}$ را در k ضرب می‌کنیم یعنی به جای k داریم $\frac{k}{s}$:

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{s+a}}{1+\frac{k}{s(s+a)}} = \frac{s}{s^2+as+k} = T_D(s)$$

$$\longrightarrow E_D(s) = C(s) = \frac{s}{s^2+as+k} \cdot D(s)$$

BERKEH

اغتشاش پله

$$\longrightarrow D(s)=\frac{1}{s} \longrightarrow E_D(s)=\frac{s}{s^2+as+k}\cdot\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{e_{ssD}=0}$$

پس دیدیم که وارد کردن $\frac{1}{s}$ به سیستم خیلی مهم است. یعنی برای اینکه ورودی اغتشاش را حذف کنیم باید یکی s خالص اش در مسیر مستقیم فیدفوروارد تا خروجی وارد شده باشد.

تعریف نوع (type) اغتشاش: تعداد s خالص در مخرج مسیر قبل از فیدفوروارد را تایپ اغتشاش می‌گویند. در این مثال مخرج k این است: $\frac{k}{s^0}$ یعنی مخرج ندارد (توان s صفر است) پس تایپ اغتشاش صفر است.

راه دیگر صفر کردن اغتشاش این است که یک صفر در صورت فیدفوروارد اضافه کنیم یعنی: $\frac{s}{s+a}$

$$\frac{C(s)}{D(s)}=\frac{\frac{s}{s+a}}{1+\frac{ks}{s(s+a)}}=\frac{s}{(1+k)s+a}=T_D(s)$$

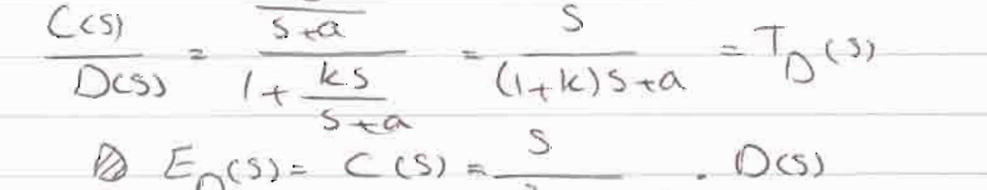
$$E_D(s)=C(s)=\frac{s}{s^2+as+k}\cdot D(s)$$

اغتشاش پله

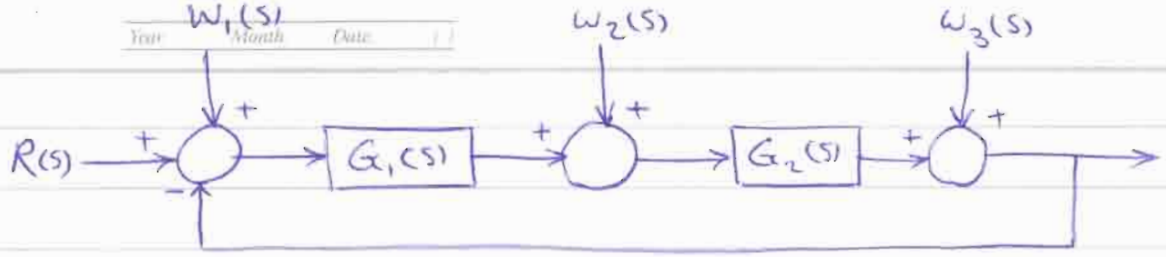
$$\longrightarrow D(s)=\frac{1}{s} \longrightarrow E_D(s)=\frac{s}{(1+k)s+a}\cdot\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{e_{ssD}=0}$$

پس تعریف دوم تایپ اغتشاش: s خالص در صورت فیدفوروارد اغتشاش تا خروجی

یا s خالص در مخرج مسیر قبل از فیدفوروارد اغتشاش:



اینجا تایپ اغتشاش دو است.



$$G_1(s)=\frac{k_1\prod_{j=1}^{m}(s+z_{1j})}{s^{q_1}\prod_{j=1}^{n}(s+P_{1j})}\qquad G_2(s)=\frac{k_2\prod_{j=1}^{m}(s+z_{2j})}{s^{q_2}\prod_{j=1}^{n}(s+P_{2j})}$$

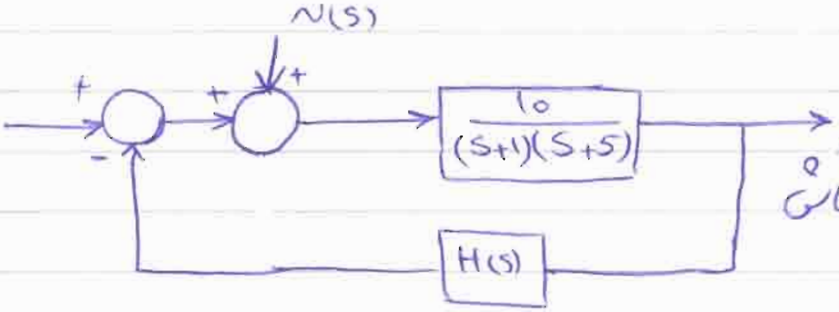
نوع سیستم به ورودی‌های اغتشاش W_1، W_2 و W_3 و ورودی مرجع $R(s)$ کدام است؟

تایپ به مرجع برابر است با: (q_1+q_2) یعنی $r(t)=t^{q_1+q_2}u(t)$ کاملاً ردیابی می‌شود.

تایپ به W_3 هم همین می‌شود چون مسیر غیر فیدفورواردش G_2 و G_1 است.

تایپ به W_2، q_1 می‌شود (تعداد sهای خالص مخرج G_1). W_1 هم از تایپ صفر است

این بدترین نوع اغتشاش است که به آن اغتشاش ورودی می‌گویند، با این ورودی هیچ کاری نمی‌توان در کنترل خطی کرد. یعنی هیچ طوری نمی‌توان این اغتشاش را از بین برد. چون تایپش صفر است به ازای هیچ ورودی خطا صفر نمی‌شود.



سؤال ۹۶ - برق 83:

$H(s)$ کدام باشد تا خطای اغتشاشی پله N برابر صفر باشد؟

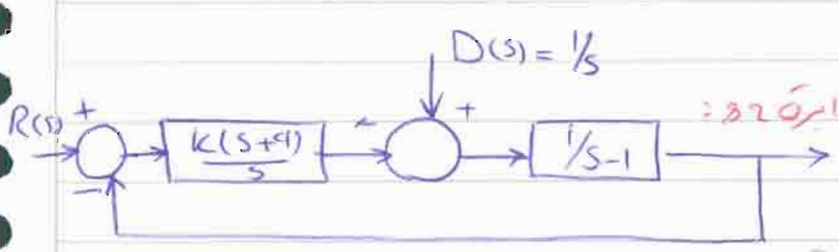
۱) $\frac{0.5}{s(s+1)}$ ۲) $\frac{1.5s}{s+2}$

BERKEH

$\frac{1.5(S+1)}{(S+2)}$ ،4

$\frac{6.5}{(S+1)(S+10)}$ ،3

سؤال 75 برق ـ 86 و سؤال 91 برق 82 :



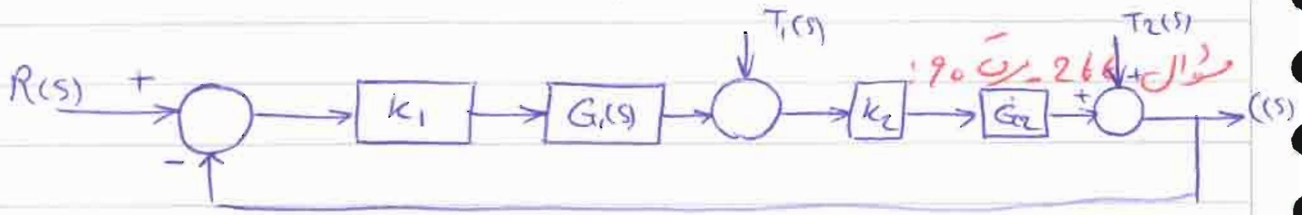
$$\Delta(s) = S(S-1) + k(S+4) = S^2 + (k-1)S + 4k$$

$$\boxed{k>1}$$

به ازای چه مقداری از k ها پاسخ حالت پایدار به ورودی اغتشاش صفر خواهد بود؟

Year Month Date

چون $\frac{1}{s}$ در مسیر فیدفوروارد است پس هم ورودی را ردیابی می‌کند و هم اغتشاش را حذف می‌کند



$$\frac{C(s)}{T_1(s)}=\frac{k_2G_2}{1+k_1k_2G_2G_1} \qquad k_2\downarrow\ ,\ k_1k_2\uparrow\ ,\ k_1\uparrow$$

$$\frac{C(s)}{T_2(s)}=\frac{1}{1+k_1k_2G_1G_2} \qquad k_1k_2\uparrow$$

k_1 و k_2 را چنان انتخاب کنید که اثر T_1 و T_2 کم شود.

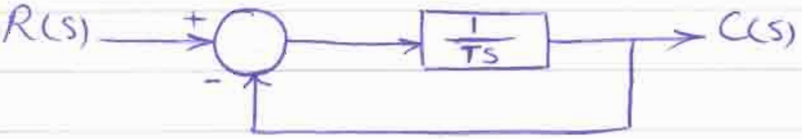
پاسخ زمانی سیستم‌های کنترل: *

(مهم)

نکته: اگر ورودی sin باشد، $G(s)$ کدام باشد تا خطا صفر شود؟ در تابع تبدیل $\frac{1}{s^2+\omega^2}$ داریم

باید $s^2+\omega^2$ در صورت یکی از کنترلرها وجود داشته باشد.

پاسخ زمانی سیستم‌های کنترل:



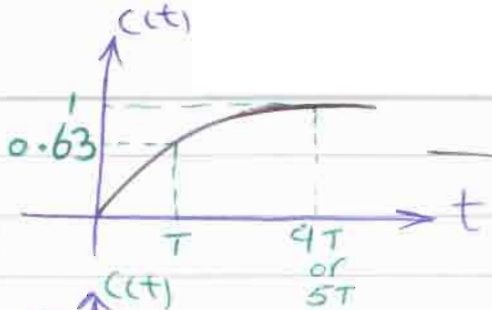
از سیستم مرتبه اول:

$\equiv$

$$\frac{1}{s}=R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{Ts+1}} \longrightarrow C(s)=\frac{1}{(Ts+1)}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}$$

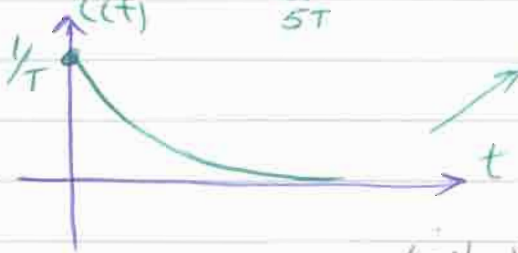
$$c(t)=(1-e^{-\frac{t}{T}})u(t)$$

Year. Month. Date. ( )



پله $c(t) = (1 - e^{-t/T})\, u(t)$

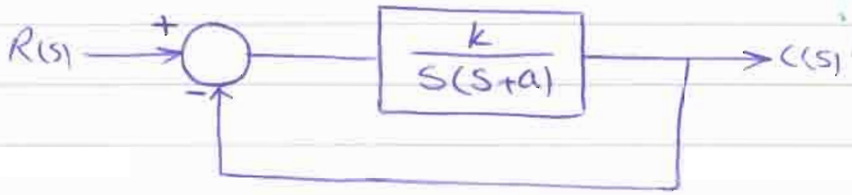
ضربه $c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}\, u(t)$



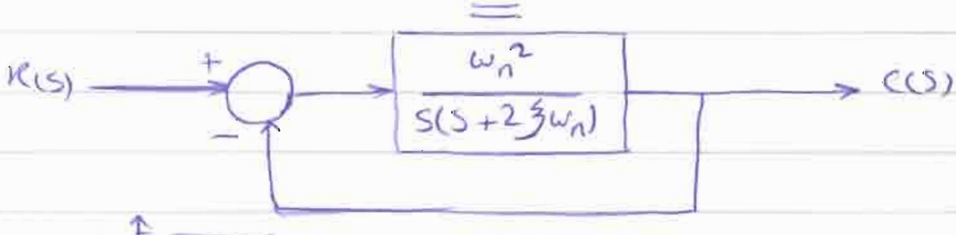
پاسخ شیب $c(t) = (t - T + T e^{-\frac{t}{T}})\, u(t)$

انتگرال پاسخ پله

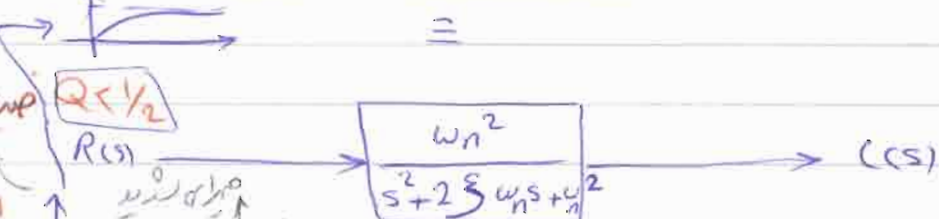
۲) سیستم مرتبه دوم:



$\equiv$



$\equiv$



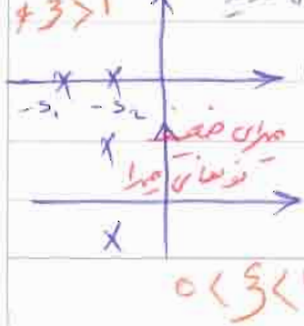
ضریب ثابت $\boxed{Q<1/2}$

میرای شدید

$\xi>1$

$c_1 e^{-s_1 t} + c_2 e^{-s_2 t}$

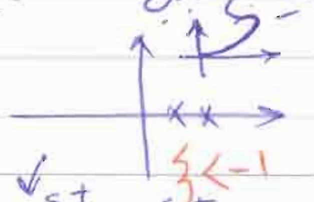
حالت های مختلف ریشه های این تابع تبدیل:



میرای ضعیف

نوسان های میرا

$0<\xi<1$

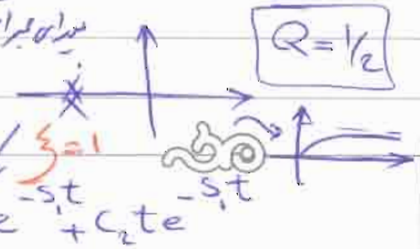


$\xi<-1$

$c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$

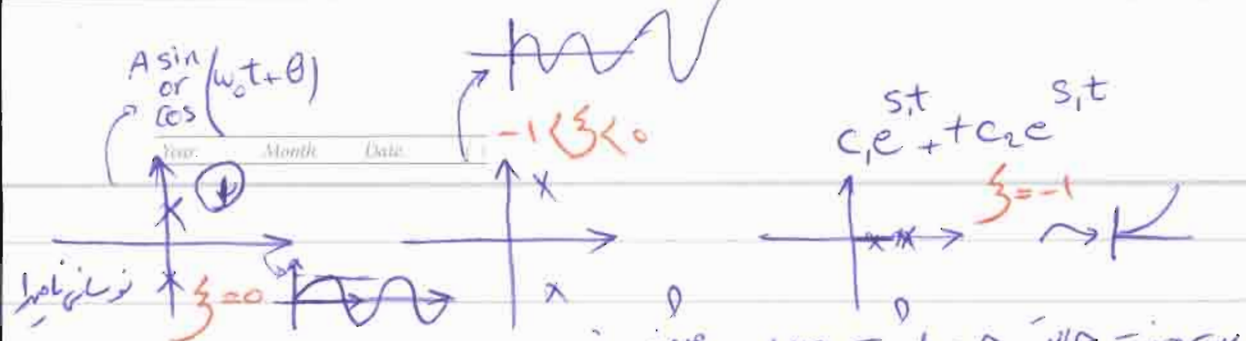
میرای بحرانی

$\boxed{Q=1/2}$



$\xi=1$

$c_1 e^{-s_1 t} + c_2 t e^{-s_1 t}$



پس هفت حالت وجود داشت. معادله مشخصه:

$$\Delta(s)=S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2$$

$$\rightarrow \Delta=b^2-4ac=4\zeta^2\omega_n^2-4\omega_n^2>0\rightarrow \zeta^2>1 \begin{cases}\zeta>1\\ \zeta<-1\end{cases}$$

$$<0\rightarrow \zeta^2<1 \begin{cases}0<\zeta<1\\ -1<\zeta<0\end{cases}$$

اگر مدار اسیلاتور شود، در صورت ۱۰۰٪ پاسخ ماندگار نوسانی شود (ضریب S صفر شود و عدد ثابت مثبت شود:

$$\frac{1}{S+(1-k)S-4k}=-4$$

به ازای هیچ k اسیلاتور نمی‌شود

$k=1$ یا

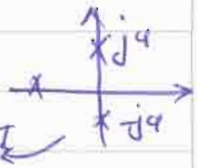
اسیلاتور می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix}0&\omega_0\\-\omega_0&0\end{bmatrix}$$

① : می‌خواهیم ماتریس A را طوری طراحی کنیم که شکل ① بدست آید:

$$|SI-A|=S^2+\omega_0^2=\begin{vmatrix}S&-\omega_0\\ \omega_0&S\end{vmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&0&4\\0&-4&0\end{bmatrix}\rightarrow |SI-A|=(S+2)(S^2+16)\rightarrow$$



100% = over shoot

مربوط به میرایی ~~جمعی~~ بحرانی : سوال 186 - ص 33 :

دقت میرایی از نوع بحرانی $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

است ، حساسیت پاسخ ضربه واحد سیستم نسبت به ω_n پس از یک ثانیه ؟

بحرانی $\rightarrow \zeta=1 \rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$

$\rightarrow \underset{\text{ضربه}}{R(s)=1} \rightarrow \underset{\text{پاسخ ضربه}}{C(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \rightarrow \boxed{c(t)=\omega_n^2\, t\, e^{-\omega_n t}}$

پاسخ ضربه یعنی لاپلاس معکوس تابع تبدیل

میرایی بحرانی سریعترین پاسخ بدون فراجهش است.

$\xrightarrow{\text{حساسیت پاسخ ضربه}} S^{c(t)}_{\omega_n} = \frac{\partial c(t)}{\partial \omega_n} \cdot \frac{\omega_n}{c(t)}$

$= (2\omega_n t e^{-\omega_n t}) + (-t^2 e^{-\omega_n t} \omega_n^2)$

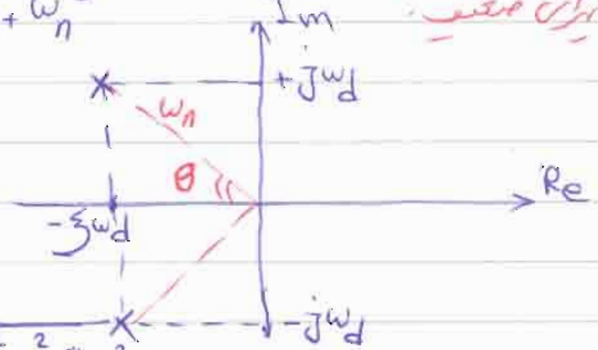
$\xrightarrow{\text{پس از یک ثانیه} \Rightarrow t=1} = \left[(2\omega_n e^{-\omega_n}) - (e^{-\omega_n} \omega_n^2)\right] \frac{\omega_n}{\omega_n^2 e^{-\omega_n}}$

$= \boxed{2-\omega_n}$

سیستم مرتبه دوم میرایی ضعیف:

$D(s) = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$

$0<\zeta<1$



$\rightarrow s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{-4\zeta^2\omega_n^2+4\omega_n^2}}{2}$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

نسبت میرایی : ζ

فرکانس طبیعی میرا نشده : ω_n

$$\sin\theta = \sqrt{1-\zeta^2}$$

فرکانس طبیعی میرا شده : $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\cos\theta = \zeta \Rightarrow \boxed{\theta = \cos^{-1}\zeta}$$

ضریب میرایی : $\alpha = \zeta(\omega_n)$

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

هرچه ζ کوچکتر شود θ بزرگتر می‌شود. این برای $0<\zeta<1$ صادق است یعنی ζ نزدیک صفر شود. که $\theta = \frac{\pi}{2}$ شود. اگر $\zeta = 1$ شود میرایی بحرانی می‌شود یعنی دو قطب روی هم می‌افتند.

که نوسان بیشتر $\leftarrow$ $\rightarrow$ میرایی بیشتر نوسان کمتر

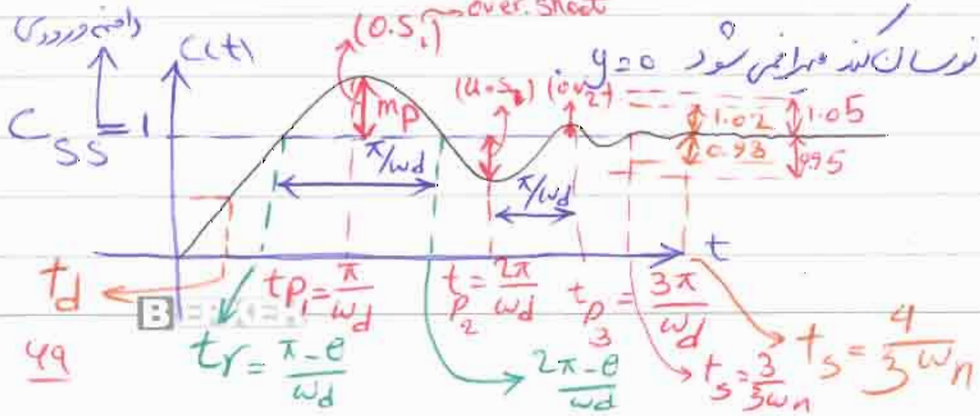
$$0 < \zeta < 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n^2 s + \omega_n} \xrightarrow{R(s) = 1/s} C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta)$$

هرچه ω_n و ζ بیشتر شود میرایی بیشتر می‌شود یعنی سریعتر میرا می‌شود.

با فرکانس ω_n نوسان کند میرا نمی‌شود $\zeta = 0$



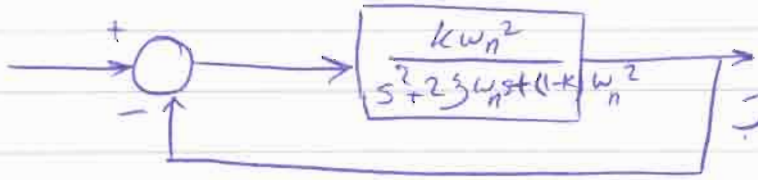
$$R(s) \rightarrow \boxed{\dfrac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}} \rightarrow C(s)$$

C_{ss} این سیستم برابر k می شود. یعنی open loop آن دیگر قطب در مبدا ندارد:

$$R(s) \rightarrow \boxed{\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}} \rightarrow C(s)$$ ← قطب در مبدا دارد

$$R(s) \rightarrow \boxed{\dfrac{k\omega_n^2}{s^2+2s\zeta\omega_n+\omega_n^2}} \rightarrow C(s)$$

=



دیگر قطب در مبدا ندارد ~ یعنی نسبت به خطای پله عدد ثابت می دهد.

نکات: سیستمی که c_{ss} آن k می شود دیگر قطب در مبدا (حلقه باز) آن ندارد.

فاصله بین پیک ها ثابت است. $\leftarrow \dfrac{dc(t)}{dt}=0 \leftarrow t_{p_n}=\dfrac{n\pi}{\omega_d}$

$$t_{p_1}=\frac{\pi}{\omega_d} \qquad t_{p_2}=\frac{2\pi}{\omega_d}$$

t_{p_n} = زمان پیک جهش

t_r (زمان خیز یا زمان صعود): زمانی است که برای اولین بار به مقدار C_{ss} می رسد

t_p یا زمان پیک جهش فقط به ω_d بستگی دارد، یعنی وقتی ۰ است اصلا به پیک نمی رسد.

Year Month Date

و هرچه ریشه‌ها منفی‌تر باشند زودتر به max می‌رسد.

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} \longrightarrow$$ تعریف اول برای t_r

t_r : مدت زمانی است که پاسخ از ۰ به ۱ برسد.

t_d : زمانی است که پاسخ از صفر به $\frac{c_{ss}}{2}$ برسد. زمان تأخیر است.

t_s : زمان نشست یا استقرار: مدت زمانی است که پاسخ روی c_{ss} می‌نشیند.

اگر $c_{ss}=1$ باشد در این صورت بین 0.98 تا 1.02 مقدار را زمان نشست می‌گویند.

اگر معیار ۲٪ باشد: بین 0.98 تا 1.02 $\longleftarrow t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

〃 ۵٪ باشد: 〃 0.95 تا 1.05 $\longleftarrow t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

هر چه α بیشتر باشد سریعتر میرا می‌شود و قطب‌ها دورتر می‌شود. $\alpha = \zeta\omega_n$

زمان نشست فقط به α بستگی دارد. اگر قسمت حقیقی قطب‌های یک سیستم از ۲- کوچکتر باشد

زمان نشست آن از 2s کوچکتر است؟ خیر – فقط برای یک سیستم مرتبه ۲ استاندارد

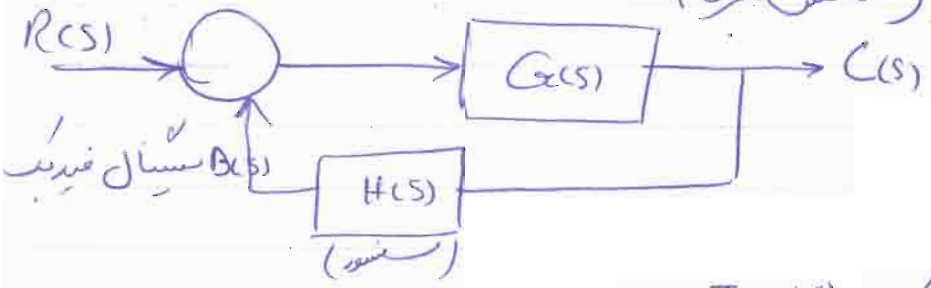
درست است. (که در شکل نشان داده شده است). (سؤال 269) (برگ ۹۰)

M_p : بیشترین مقدار over shoot است. (در شکل نشان داده شده)

Subject:
Year. Month. Date.

اثرات فیدبک:

۱) اثر بر روی بهره (کاهش بهره):



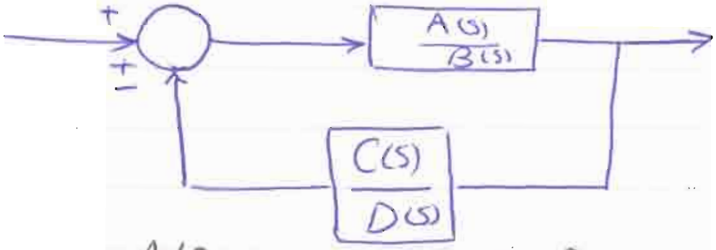
$$\boxed{B(S) = C(S)\,H(S)}$$

$$T_{OL}(S) = G(S)H(S) = L(S)$$

بهره حلقه باز

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1+\underbrace{G(S)H(S)}_{L(S)}} = T(S) = M(S)$$

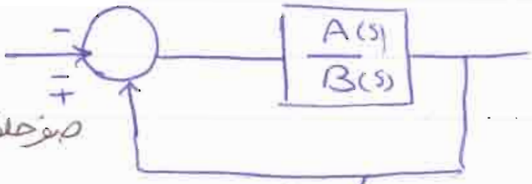
$L(S) \longrightarrow$ بهره حلقه



$$T_{OL} = \frac{A(S)\,C(S)}{B(S)\,D(S)}$$

$$T(S) = \frac{A/B}{1 \mp \frac{A}{B}\frac{C}{D}} = \frac{A \times D}{BD \mp CA}$$

حالت خاص : $\frac{C}{D} = 1 \longrightarrow$



$$T(S) = \frac{A}{B \pm A}$$

$A(S) = 0$ صفر حلقه بسته

$A \pm B = 0$ قطب حلقه بسته

فیدبک (منفی / مثبت) واحد

PaPCO

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \qquad t_{p_n} = \frac{n\pi}{\omega_d}$$

$$\rightarrow C(t_{p_n}) = 1 + (-1)^{n+1} e^{-\zeta\omega_n \frac{n\pi}{\omega_d}}$$

$$C(t_{p_1}) = 1 + (-1)^2 e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_d}} = 1 + e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\zeta^2}}} = 1 + \underbrace{e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\theta}}}_{M_p}$$

$$C(t_{p_2}) = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\operatorname{tg}\theta}} \rightarrow (U.S)_1$$

over shoot فقط به ζ بستگی دارد. هرچه ζ کمتر باشد overshoot بیشتر می‌شود

$$\text{if } \zeta = 0 \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \operatorname{tg}\theta = \infty \longrightarrow M_p = e^{-\frac{\pi}{\infty}} = 1$$

زمانی که به سطح صفر در روش
رخ دهد.

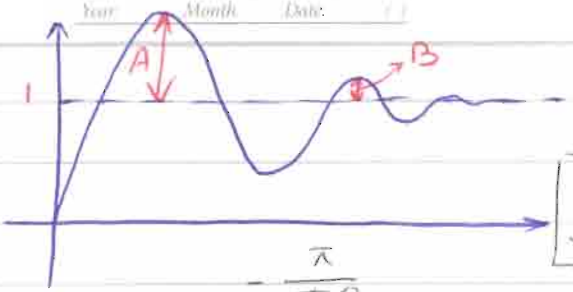
$$\text{overshoot} = 100\%$$

(بسیار مهم)

$$\text{under shoot } 1 \; (U.S.)_1 = (M_p)^2 = (O.S_1)^2$$

$$C(t_{p_3}) = 1 + e^{-\frac{3\pi}{\operatorname{tg}\theta}} \; (O.V.)_2 = (M_p)^3 = ((O.S)_1)^2$$

پس همه یک هم over ها و under ها به ζ بستگی دارد. درحالتی که ζ=0 است
با هم برابر می‌شود.



سؤال 267 برق ۹۰:

نسبت میرایی سیستم کدام است؟ $\boxed{\xi = ?}$

$$\underset{\text{overshoot}}{A} = e^{-\frac{\pi}{tg\theta}} \qquad \ln\frac{A}{B} = \delta$$

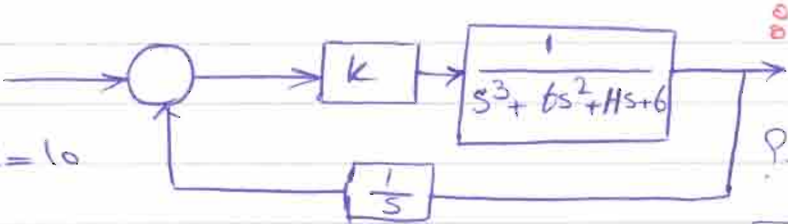
$$\underset{\text{undershoot}}{B} = e^{-3\pi/tg\theta} \longrightarrow \frac{A}{B} = e^{\frac{2\pi}{tg\theta}} \xrightarrow{\ln} \boxed{\delta = \frac{2\pi}{tg\theta}}$$

$$\longrightarrow tg\theta = \frac{2\pi}{\delta} \quad , \quad 1 + tg^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\longrightarrow 1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2} = \frac{1}{\cos^2\theta} \longrightarrow \frac{\delta^2 + 4\pi^2}{\delta^2} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\rightsquigarrow \cos^2\theta = \frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2} \longrightarrow \boxed{\cos\theta = \xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}}$$

برق ۸۹ - سؤال 235:



$K = 10$

حداکثر فراجهش سیستم کدام است؟

P.O. → percent of overshoot : ۱) 5٪ ۲) 20٪ $\boxed{۳) 100\%}$ ۴) 10٪

اگر در دو سطر صفر رخ دهد (در مرز پایداری باشد) اورشوت آن 100٪ می‌شود.

0.5 مرتبه 2 به بالا یا صفرات با 100. مکان قطب‌ها روی محور افقی باشد Mp صفر می‌شود

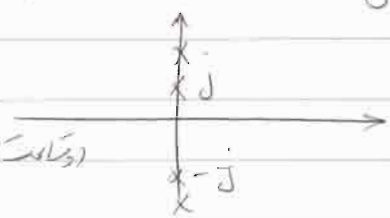
BERKEH

Year. Month. Date. ( )

$$T(s) = \frac{ks}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + k}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 11 & k \\
s^3 & 6 & 6 & \\
s^2 & 10 & k & \\
s^1 & \frac{60-6k}{10} = 0 & & \\
s^0 & k & &
\end{array}$$

$$10 \;\; k \xrightarrow{k=10} 10s^2 + 10 = 0 \rightarrow s = \pm j$$



(نوسانی)

یک سطر صفر بدون تغییر علامت داریم.

$$G_1(s) = \frac{6}{s^2+s+4} \qquad G_2(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2+s+4}$$: برگ 88 _ سوال 188

$$\frac{12}{s^2+0.1s+8} \qquad \frac{2(s+1)^2}{s^2+0.1s+8}$$

$$\frac{6}{s^2+s+4} \qquad \frac{s+1}{s^2+s+4} \checkmark$$

$$\frac{6}{s^2+s+4} \qquad \frac{0.1s+1}{s^2+s+4}$$

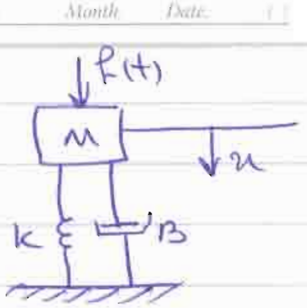
پاسخ پله دو سیستم با صفرهای و قطبهای یکسان، پاسخ ضربه $G_2(s)$ در لحظه 0^+ برابر است.

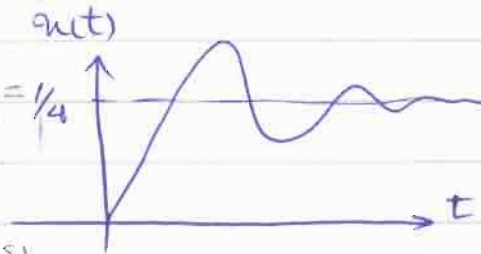
$$\lim_{s\to\infty} s\,G_2(s) = 1$$

$m = 1kg \qquad B = 1 \qquad g = 10$ سوال 187 _ برگ 88.

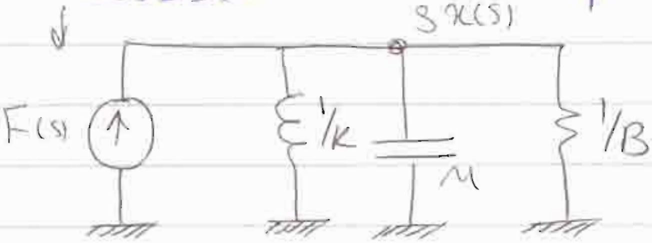
$\zeta = ?$

Year: Month: Date:





$x_{ss} = 1/4$



$$\frac{s x(s)}{\frac{1}{Ms}} + \frac{s x(s)}{\frac{1}{k}s} + \frac{s x(s)}{1/B} = F(s)$$

$$(Ms^2 + Bs + k)\,x(s) = F(s) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k} F(s)$$

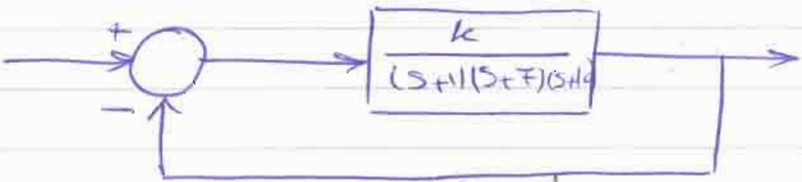
$$\longrightarrow x(s) = \frac{1}{s^2 + s + k} \cdot \frac{1}{s} \xrightarrow{①} x_{ss} = \frac{1}{k} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{k = 4}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 4} \longrightarrow \omega_n = 2 \;,\; 2\zeta\omega_n = 1 \Longrightarrow \boxed{\zeta = \frac{1}{4}}$$

$\boxed{①}$ $s\,x(s) \xrightarrow{s=0} \frac{1}{k} = \frac{1}{4} \Longrightarrow$ درست

سؤال 132:

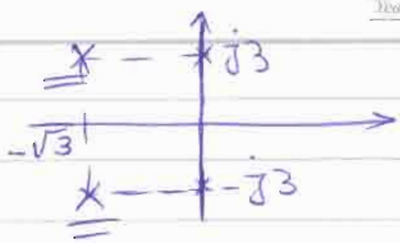
k را چنان بیابید که $t_s < 2$ با معیار 2% شود.



$$\frac{4}{\zeta\omega_n} < 2$$

$$\longrightarrow \zeta\omega_n > 2$$

زمان فراجهش و زمان استقرار چند است؟

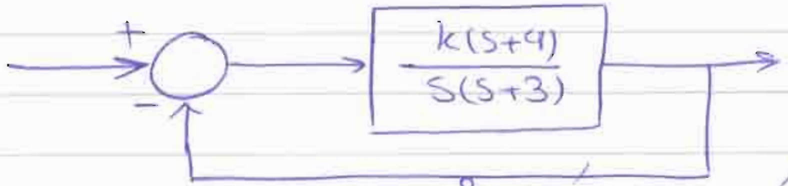


سوال 65 برق 85 د

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

برق 85 ـ سوال 70:



k را چنان بیابید که 0.5 ماکزیمم شود:

$\zeta = \zeta_{max}$

$$\Delta(s) = s^2 + (3+k)s + 4k$$

$$\omega_n = 2\sqrt{k} \quad , \quad \zeta = \frac{3+k}{4\sqrt{k}} = \frac{3+k}{2\omega_n}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}}$$

$$\text{for } \zeta_{max} \longrightarrow \frac{\partial\zeta}{\partial k} = 0 \to 0 = \frac{4\sqrt{k} - \frac{2}{\sqrt{k}}(3+k)}{16k}$$

$$\longrightarrow 4k = 2(3+k)$$

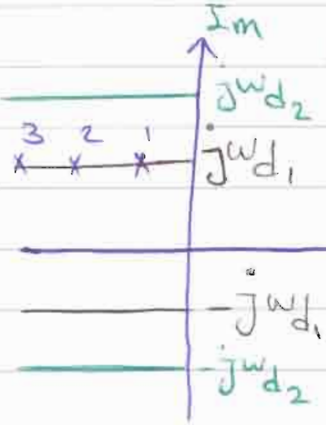
$$\longrightarrow 2k = 6$$

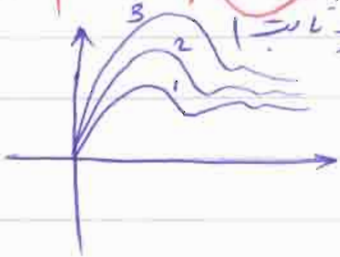
$$\longrightarrow \boxed{k = 3}$$

در سوال اشکال دارد چون این سیستم صفر دارد 0.5 از این روش بدست نمی‌آید.

مکان هندسی

قطب‌های سیستم مرتبه دوم با ω_d ثابت:





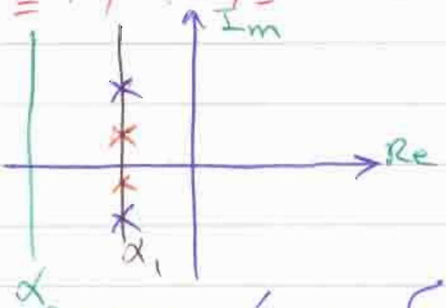
(با زمان پیک ثابت)

$\omega_{d_2} < \omega_{d_1}$

مکان هندسی قطب‌های سیستم مرتبه دوم با α ثابت:

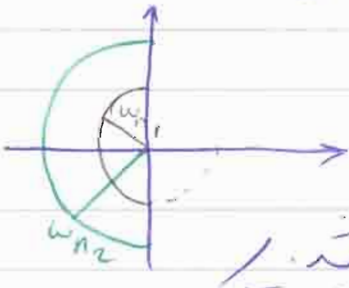
(با زمان نشست ثابت)

$\alpha_2 > \alpha_1$



زمان نشست پاسخ‌های دارای با هم یکسان است یعنی با هم نشست می‌کنند. ولی $O.S$ ها با هم متفاوت است. $O.S$ آن‌ها بیشتر است چون از محور حقیقی دورتر است.

" " " " ω_n ثابت:



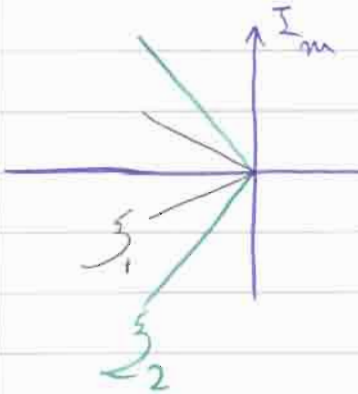
$\omega_{n_2} > \omega_{n_1}$

هیچ مشخصه‌ای وجود ندارد که فقط به ω_n مربوط باشد.

پس اگر ω_n ثابت باشد ممکن است مشخصه‌های دیگر تغییر کنند.

" " " ζ ثابت (اورشوت ثابت): یعنی حداکثر فراجهش ثابت.

ζ ثابت ← θ ثابت ← نیم‌خط.



هرچه ζ به صفر نزدیکتر شود O.S بیشتر می‌شود.

$\zeta_1 > \zeta_2$

اورشوت ζ_2 بیشتر است

اگر ζ هرچه به Re نزدیکتر شود O.S کمتر می‌شود.

$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} \downarrow$

چون این افزایش می‌یابد

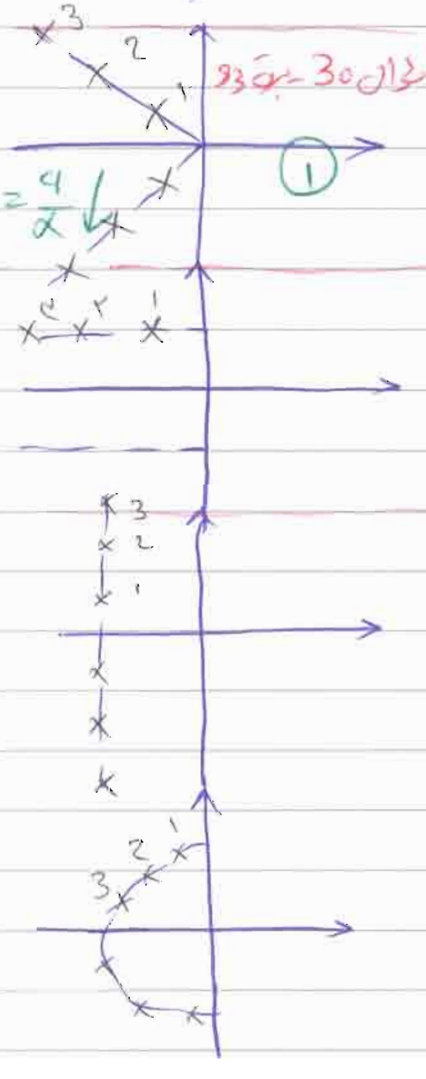
$\omega_n \uparrow$ $\omega_d \uparrow$

هرچه ζ ثابت، اورشوت ثابت است

M_p: const

$t_s = \frac{4}{\alpha} \downarrow$

سوال 30 - بوده



t_p=const

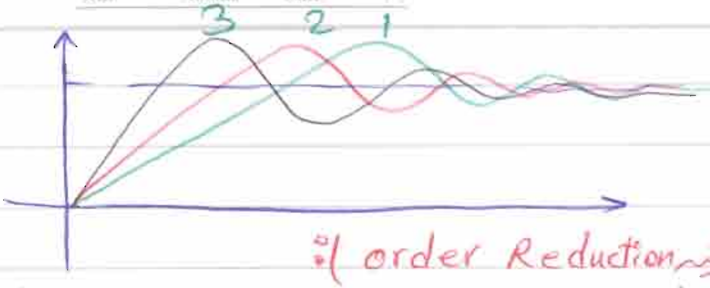
$\omega_{n_3} > \omega_{n_2} > \omega_{n_1}$

$\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3$ / $t_{r_1} < t_{r_2} < t_{r_3}$

سیستم‌ها یکسان است

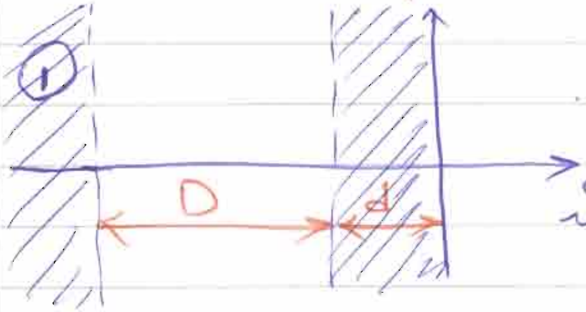
$M_{p_1} > M_{p_2} > M_{p_3}$ $t_{s_3} < t_{s_2} < t_{s_1}$

ثابت ω_d



مربوط به این شکل صفحه قبل ①

قطب‌های غالب (کاهش مرتبه order Reduction):

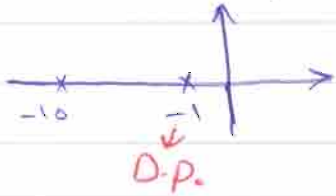


محل هاشور خورده محل قرار گرفتن قطب‌هاست.

اگر مقدار D برابر با ۱۰ تا ۵ برابر d باشد

می‌توان از قطب‌های محل ① صرف نظر کرد.

$$T(S)=\frac{1}{(S+1)(S+10)}=\frac{1/9}{S+1}-\frac{1/9}{S+10}=\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{1}{9}e^{-10t}$$



$$\hat{T}(S)=\frac{K}{S+1}\simeq\frac{0.1}{S+1}$$

تقریب زده

$$\hat{T}(0)\simeq T(0)$$

$$T(0)=1/10\rightarrow \boxed{K=1/10}$$

مثال) $\dfrac{1}{S(S+1)(S+10)}\approx\dfrac{0.1}{S(S+1)}$

حال اگر تابع تبدیل صفر داشته باشد:

ضریب کوچک است

$$T(S)=\frac{S+0.95}{(S+1)(S+10)}=\frac{\frac{-0.05}{9}}{S+1}+\frac{\frac{9.05}{9}\simeq 1}{S+10}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}}\frac{-0.05}{9}e^{-t}+\frac{9.05}{9}e^{-10t}$$

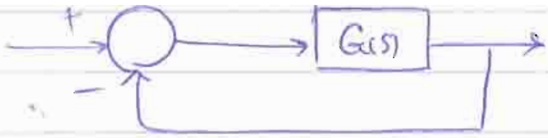
(نکته مهم) درست است که این قطب غالب است ولی ضریب کوچک است زیرا نزدیک قطب نظیرش یک صفر وجود دارد.

پس در این سیستم ۱۰- غالب است.

$$G(s) = \frac{k}{s(s+3)(s+6)}$$

سؤال ۱۱۶، اتوماسیون 88 :

k را چنان بیابید تا نسبت میرایی قطب‌های غالب $\zeta = 0.5$ شود.



$$\Delta(s) = \underbrace{s^3 + 9s^2 + 18s}_{x} + k \longrightarrow \text{معادله مشخصه}$$

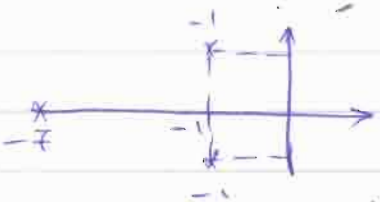
s^2+2s+4

صورت سؤال گفته که $\longrightarrow \quad x = (s^2 + \omega_n s + \omega_n^2)(s+\alpha)$

$$\longrightarrow s^3 + \underbrace{(\omega_n + \alpha)}_{9} s^2 + (\omega_n^2 + \alpha\omega_n)s + \alpha\omega_n^2$$

$$\begin{cases} \omega_n + \alpha = 9 \\ \omega_n^2 + \alpha\omega_n = 18 \end{cases} \longrightarrow \omega_n = 2 \rightarrow \alpha = 7 \Longrightarrow k = \alpha\omega_n^2 = 7 \times 4 = \boxed{28}$$

حال می‌خواهیم ببینیم صورت سؤال را درست طراحی کرده‌اند یا نه ؟



اورشوت ← قطب روی $j\omega$ ← اورشوت ٪۱۰۰

جلسه دهم

مکان هندسی ریشه‌ها Root lucas: می‌خواهیم محل قطب‌های حلقه بسته را از روی محل صفر و قطب‌های حلقه باز بدست آوریم.

← از روی حلقه باز بدست می‌آید.

$$\Delta(s)=1+\underbrace{K\,G(s)H(s)}_{\text{تابع تبدیل حلقه باز}}=0 \longrightarrow$$ مخرج تابع تبدیل حلقه بسته

← ریشه‌ها قطب‌های حلقه بسته هستند.

$$\rightarrow \quad T(s)=\frac{KGH}{1+KGH}$$

K اکثراً گین است می‌تواند یک پارامتر مجهول در سیستم باشد.

اگر روش کار بر اساس یک پارامتر مجهول سیستم بررسی شود باز هم منظور مکان هندسی ریشه‌هاست.

$K\,G(s)H(s)=-1 \longrightarrow k=\dfrac{-1}{G(s)H(s)}$ ← این عبارت ها همیشه یک عبارت مختلط است ولی $K\in\mathbb{R}$ است یعنی عبارتی که مختلط بود برابر اعداد حقیقی شده است. یعنی این اعداد مختلط باید به طوری تعیین شوند که k یک عدد حقیقی مثبت یا منفی شود. پس در نتیجه فاز GH باید صفر شود. پس روابط زیر را داریم:

شرط زاویه:

$$\text{if}\quad s:\text{closed loop}\begin{cases}\angle G(s_1)H(s_1)=0 \rightarrow K<0\\ \angle G(s_1)H(s_1)=-180^\circ \rightarrow k>0\end{cases}$$

← در این صورت k عدد حقیقی می‌شود.

پس اگر یک s به ما دادند برای اینکه بفهمیم قطب حلقه بسته است یا خیر باید زاویه آن را چک کنیم

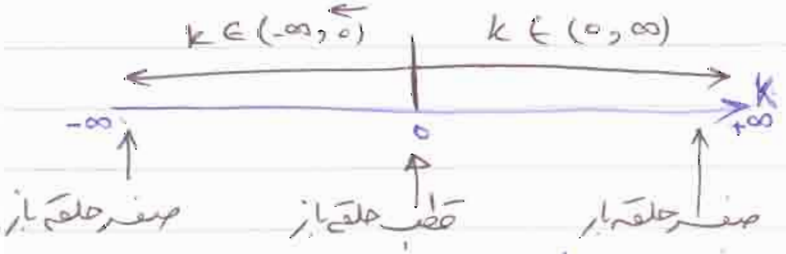
اگر φ با -180° شد قطب است در غیر اینصورت نیست.

$G(s)\,H(s)$ تابع تبدیل حلقه باز است.

شرط اندازه $\rightarrow$ $k = \frac{-1}{G(s)H(s)} \longrightarrow |G(s_1)H(s_1)| = \frac{1}{k}$

if s_1 : opened loop pole $\rightarrow G(s_1)H(s_1) = \infty \Longrightarrow k \to 0$

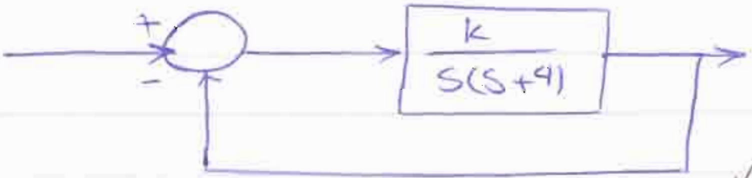
if s_2 : opened loop Zero $\rightarrow G(s_2)H(s_2) = 0 \Longrightarrow k \to \infty$

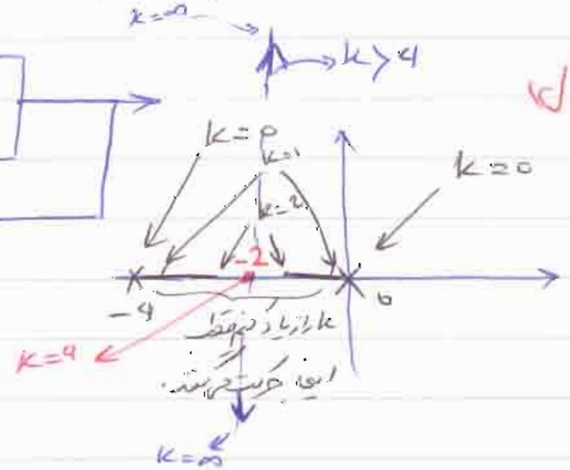


مکان هندسی ریشه ها همیشه از قطب حلقه باز به سمت صفر حلقه باز می رود.

به طور کلی در روت لوکاس از قطب حلقه باز به سمت صفر حلقه باز حرکت می کنیم.

مثال)





$G(s)\,H(s) = \frac{1}{s(s+4)}$

$s = 0, -4 \rightarrow$ قطب حلقه باز

$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s)k = 0 = s(s+4) + k = 0 \longrightarrow$ حلقه بسته

$\hookrightarrow$ شرط پایداری این است که همه ضریب ها $\pm$ باشد.

Year. Month. Date. ( )

$D(s) = s^2 + 4s + k = 0 \rightarrow$ به ازای $k=0$ قطب‌های حلقه بسته و باز یکجا می‌شود

$k=1 \rightarrow s = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \begin{cases} -3/\ldots \\ -0.3 \end{cases}$

تا قبل از $k=4$ قطب حقیقی روی محور است سه میرای شدید.

۱) معادله ریشه های مضاعف دارد. ۲) میرای بحرانی است ۳) شاخه های مکان

$k=4$

بهم می‌خورند به ازای $k=4 \rightarrow s=-2$ می‌شود دو قطب روی هم داریم.

به ازای $k=4.1$ ریشه ها مختلف قطب ها مختلط می‌شود overshoot داریم.

$S = \frac{-4 \pm \sqrt{16-k}}{2} \rightarrow -2 \pm$ [ ] . یعنی Real قطب ۲- است.

وقتی k نزدیک چهار است سیستم به مقدار بسیار حساس است. به ازای 4.1 میرای بحرانی داریم

ریشه‌های ما مختلط ... بنابراین k حساسیت قطب‌ها به این است. یعنی قطب‌های حلقه

بسته به این سیستم بسیار حساس است.

صفرهای حلقه باز این سیستم عبارت است از: $\begin{matrix} -2+j\infty \\ -2-j\infty \end{matrix}$

شرط $k>0$ سیستم پایدار می‌شود.

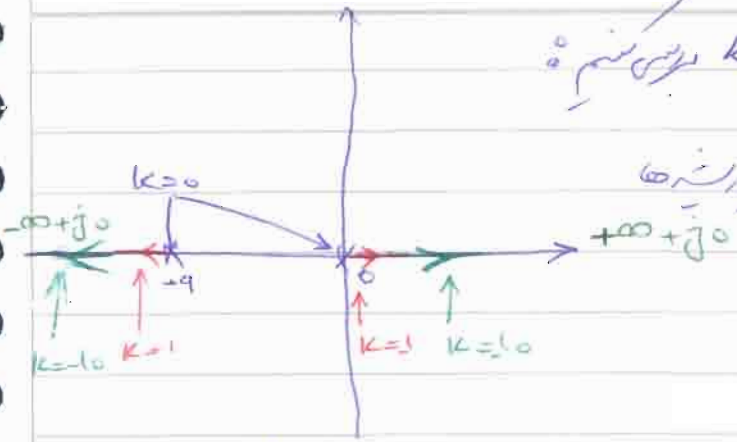
حد کاره یعنی بهره را چقدر زیاد کنم که همچنان سیستم پایدار بماند. حد بهره در اینجا ∞ است. چون

روت لوکاس این سیستم سمت چپ است همیشه پایدار است. پس حد بهره‌مان ∞ است.

حال می‌خواهیم این سیستم را به ازای $k<0$ بررسی کنیم:

k را هر چه قدر منفی بگذاریم $\Delta>0$ می‌شود یعنی ریشه‌ها

روی محور حقیقی هستند.



$k=-1 \rightarrow s^2+4s-1=0 \rightarrow s=\frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2}=$ ـــــ قرمز

$k=-10 \rightarrow s^2+4s-10=0 \rightarrow s=\frac{-4\pm\sqrt{16+40}}{2}=$ ـــــ سبز

پس می‌بینیم که سیستم به ازای $k<0$ سیستم به سمت ناپایداری هم پیش می‌رود.

در این جا صفرهای حلقه باز $+\infty+j0$ و $-\infty+j0$ می‌شود. یعنی در اینجا محل صفرهای حلقه باز کاملاً به k مربوط است.

با فرض فیدبک واحد صفر حلقه باز و حلقه بسته با هم یکی است.

مراحل رسم مکان هندسی ریشه‌ها:

مرحله صفرم) نوشتن معادله مشخصه حلقه بسته به صورت: $\Delta(s)=1+k\overbrace{G(s)H(s)}^{\text{حلقه باز}}=0$

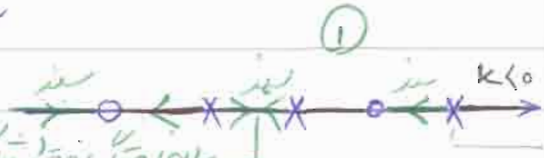
پارامتری که قرار است مکان هندسی براساس آن رسم شود.

مرحله اول) رسم قسمت از محور حقیقی که روی مکان هندسی است.

یعنی کدام قسمت محور حقیقی قطب حلقه بسته است.

For K>0 ← سمت راست آن تعداد فردی صفر و قطب باشد. (حلقه باز)

For k<0 ← سمت راست آن تعداد زوج صفر و قطب باشد. (حلقه باز)



جایی حتماً نقطه شکست است. (*)

مشکی k<0

سبز k>0

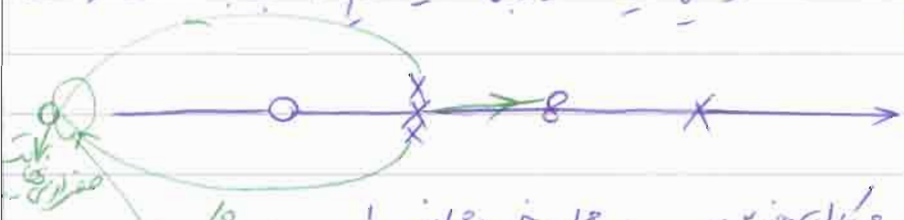
هر وقت سیستم قطب هایش سه تا بود نیمی ریشه های جزء مکان است.

از این دو شکل می فهمیم همه محور حقیقی جزء مکان است که بعضی جزء k>0 است یک سری جزء k<0 است.

(*) بین دو قطب متوالی یا بین دو صفر متوالی اگر جزء مکان باشد حتماً نقطه شکست داریم.

(۱) ← سه تا قطب داریم دو تا صفر یعنی ۱ صفر در بی نهایت داریم

(۲) ← چهار تا قطب داریم، سه تا صفر یعنی یک صفر در بی نهایت داریم که قطب به سمت آن حرکت کند.



مرحله دوم: مجانب های مکان هندسی ← محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی For k>0, k<0

زاویه خروج مجانب ها از محور حقیقی

مجانب زمانی داریم که درجه صورت و مخرج برابر نباشد.

حلقه باز　حلقه باز

$$\sigma = \frac{\sum \text{poles} - \sum \text{zeros}}{n-m} = \frac{\text{مجموع قطب های حلقه باز} - \text{مجموع صفرهای حلقه باز}}{\text{درجه مخرج حلقه باز} - \text{درجه صورت حلقه باز}}$$

محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی

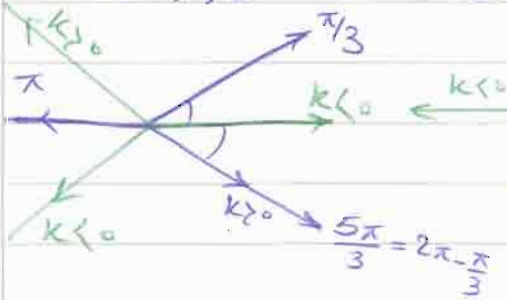
مکان هندسی نسبت به محور حقیقی متقارن است. (مهم)

$$\varphi_{k>0} = \frac{(2L+1)\pi}{n-m} \qquad L=0,1,\dots,n-m-1$$

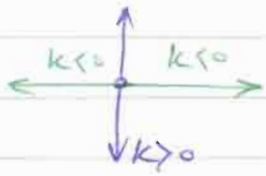
زاویه خروج مجانب‌ها از محور حقیقی

$$\varphi_{k<0} = \frac{2L\pi}{n-m} \qquad L=0,1,\dots,n-m-1$$

$n-m=3$ $L=0,1,2$

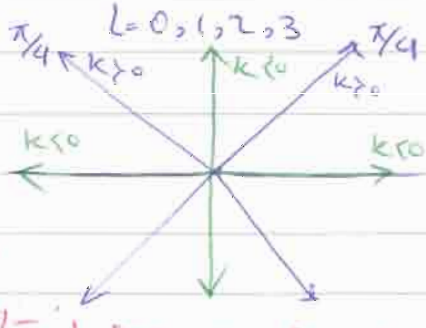


$n-m=2$ $L=0,1$

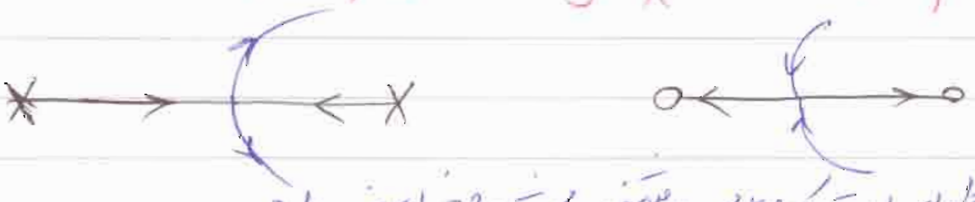


$n-m=1$ $L=0$

$n-m=4$ $L=0,1,2,3$



مرحله سوم: (نقطه شکست) (Break_Awaypoint) (Break_Inpoint)



در نقطه شکست نقطه‌ای است که معادله مشخصه ریشه مضاعف دارد.

در نقطه شکست حساسیت بی‌نهایت است.

(1)
$\Delta(s) = P(s) + kQ(s) = 0$ ⟵ فرض کنیم خروج حلقه بسته باشد

$$D(s) = 1 + k\frac{Q(s)}{P(s)} = 0 \qquad G(s)H(s)$$

از (۱) مشتق بگیریم
$$\longrightarrow \begin{cases} P'(s) + kQ'(s) = 0 \\ P(s) + kQ(s) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$
s ای که در هر دو را ارضا کند نقطه شکست است.

$$\longrightarrow P'(s) + \frac{-P(s)}{Q(s)}Q'(s) = 0 \longrightarrow P'(s)Q(s) - P(s)Q'(s) = 0$$

$$k = -\frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \frac{dk}{ds} = 0 \longrightarrow$$ محاسبه نقطه شکست

$$\longrightarrow s = s_1, s_2, s_3$$

$$\boxed{1 + GHk = 0 \longrightarrow k = \frac{-1}{GH}} \quad (*)$$

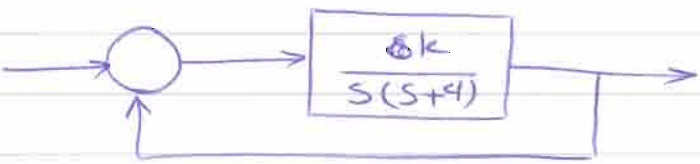
در رابطه * قرار می‌دهیم سه حالت رخ می‌دهد:

۱) اگر $k \in \mathbb{C}$ شد (k مختلط شد) یعنی نقطه متناظر نقطه شکست نیست.

۲) اگر $k \in \mathbb{R}^+$ شد یعنی s متناظر برای $k>0$ است.

۳) اگر $k \in \mathbb{R}^-$ شد یعنی s متناظر برای $k<0$ است.

s می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد.

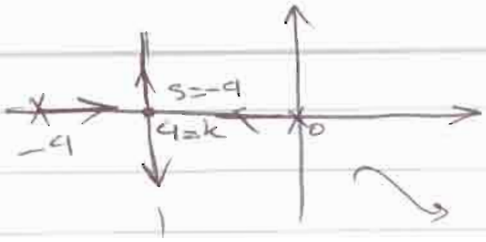


مثال) $D(s) = 1 + k\frac{1}{s(s+4)} = 0$

$$(1) \quad k = -s(s+4)$$
$$k = -(s^2 + 4s)$$

$$\frac{dk}{ds} = -(2s+4) = 0 \longrightarrow s = -2 \xrightarrow{\text{در (۱) قرار می‌دهیم}} k = +2(-2+4) \qquad \boxed{k = 4}$$

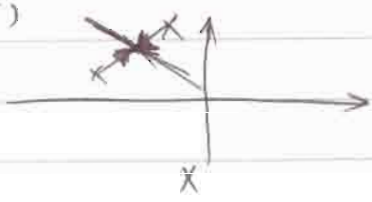
BERKEH



$s=-2$ برای $k=4$ است.

$$s^2+4s+4=(s+2)^2$$

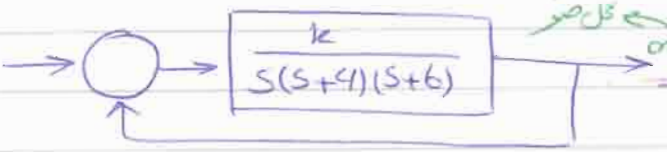
$$G(s)=\frac{k}{(s^2+2s+2)(s^2+4s+5)}$$ ← نقطه شکست مختلط است.

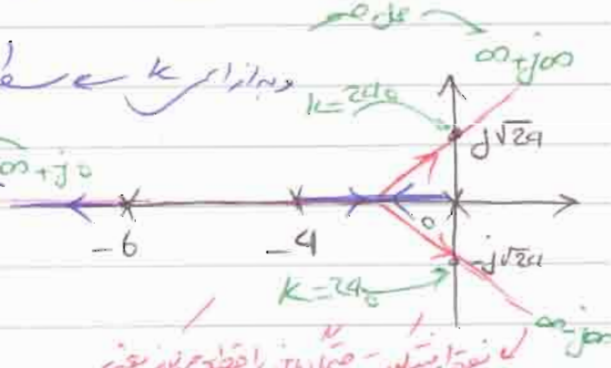


مرحله چهارم: محل برخورد مکان با محور $j\omega$ ← معیار راث.

معیار راث ← به ازای ریشه های معادله مشخصه.

(با توجه به مثال) و به ازای k ← سطر صفر رخ دهد





که نقطه شکست مجانب‌ها را قطع می‌کند یعنی همه سطر صفر رخ می‌دهد.

$$\Delta(s)=s^3+10s^2+24s+k$$

s^3	1	24
s^2	10	k → $10s^2+240=0$ → $\boxed{s=\pm j\sqrt{24}}$
s^1	$\frac{240-k}{10}$ → $\boxed{k=240}$	
s^0	k	

الان یک قطب اضافه کردیم

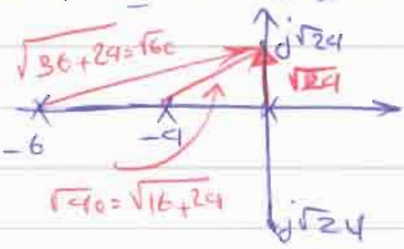
سیستم به سمت ناپایداری می‌رود. این یعنی خطای حالت ماندگار به ورودی شیب را افزایش می‌دهد. type=1.

$$e_{ss}=\frac{10}{k}$$

$0<k<240$ → پایدار

اگر شکل سهم k را بخواهد.

$$|k| = \left|\frac{1}{GH}\right|$$



$$|k| = \left|\frac{(s+P_1)(s+P_2)\cdots(s+P_n)}{(s+Z_1)\cdots(s+Z_n)}\right|$$

وقتی صفر نداریم اندازه ۱ است.

$$k = \sqrt{24}\,\sqrt{60}\,\sqrt{40} = \boxed{240}$$

در این مثال اگر $k>0$ باشد امکان ندارد سطر صفر رخ دهد. هر وقت سطر صفر رخ داد یعنی روت لوکاس آن محور را قطع می‌کند.

مرحله پنجم: زاویه خروج از قطب: $\theta_p = 180-($

$$\theta_p = \underbrace{180}_{0\,(*)} - (\text{مجموع زوایای متصل از بقیه قطب‌ها به قطب مورد نظر}) + (\text{مجموع زوایای متصل از صفرها به قطب مورد نظر}) \quad k>0$$

زاویه ورود به صفر:

$$\theta_z = \underbrace{180}_{0\,(*)} - (\text{مجموع زوایای متصل از قطب‌ها به صفر مورد نظر}) + (\text{مجموع زوایای متصل از بقیه صفرها به صفر مورد نظر}) \quad k>0$$

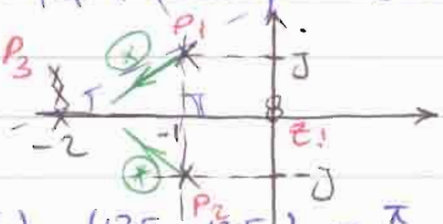
(*) ← اگر به جای 180° مقدار 0° را قرار دهیم به ازای $k<0$ به دست می‌آید ($k<0$)

اگر قطب از مرتبه m باشد:

$$m\,\theta_{p\,(k>0)} = (2L+1)(180) - (\cdots) + (\cdots)$$

$$m\,\theta_{p\,(k<0)} = (2Ln)^{(0)}\pi - (\cdots) + (\cdots) \qquad L=0,1,\dots,m-1$$

مثال:



$$\theta_{P_1} = 180 - (\underbrace{90}_{\text{متصل از } P_2 \text{ به } P_1} + \underbrace{45+45+45}_{\text{متصل از } P_3 \text{ به } P_1}) + (\underbrace{135+135}_{\text{متصل از } Z_1}) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} = -\pi + \frac{\pi}{4}$$

مرتبه

$$2\theta_{z_1} = (2k+1)\pi - (\underset{\uparrow}{0}) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 0 + 0 + 0\right)$$

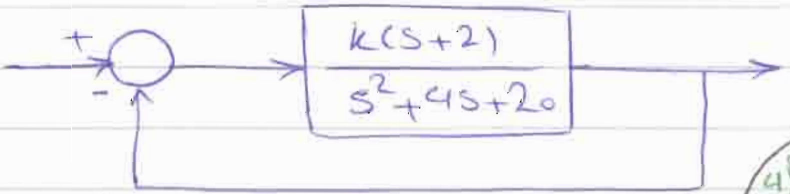
بقیه صفرها بجز مورد نظر

$$2\theta_{z_1} = (2k+1)\pi \longrightarrow k = 0, 1 \longrightarrow \begin{cases} \theta_{z_1} = \frac{\pi}{2} \\ \theta_{z_2} = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

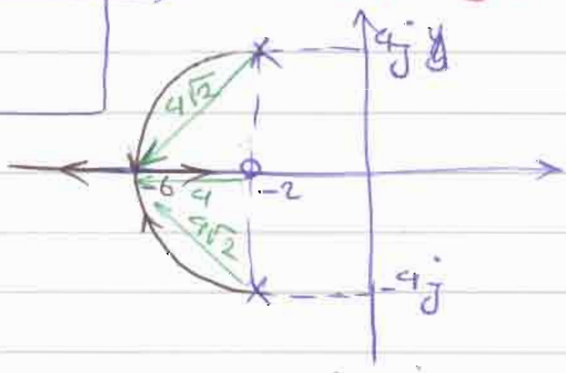
زاویه خروج از p_3 به ازای

$$k<0 \rightarrow 3\theta_{p_3} = 2l\pi - (\cancel{2\pi}) + \cancel{2\pi} \Rightarrow l = 0, 1, 2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 3\theta_{p_3} = 2l\pi \quad l = 0, 1, 2 \\ \theta_{p_3} = 0, \ \theta_{p_3} = \frac{2\pi}{3}, \ \theta_{p_3} = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$



سوال 227:



$$k = -\frac{s^2+4s+20}{s+2}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \longrightarrow \boxed{s = -6}$$

k دارای ریشه مضاعف ؟ یعنی k به ازای نقطه شکست را می‌خواهد $s=-6$ نقطه شکست است:

$$k = -\frac{36-24+20}{-6+2} = 8$$ راه ①

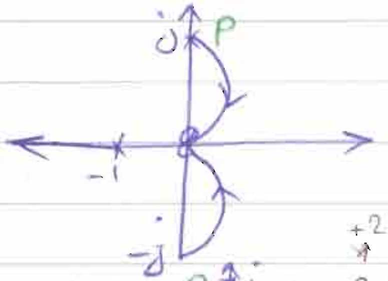
$$k = \frac{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{4} = 8$$ ② اندازه‌ای

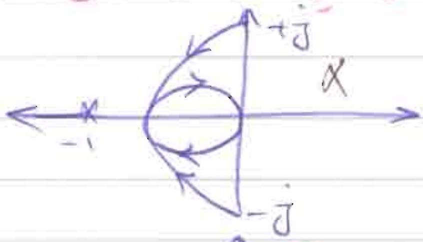
Year. Month. Date. ( )

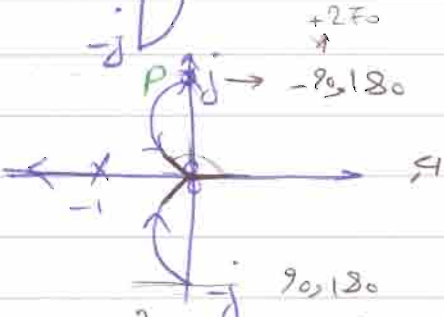
اتوماسیون 89 : سؤال 254:

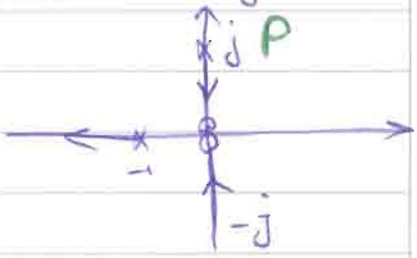
$\Delta(s) = s^3 + (k+1)s^2 + s + 1 = 0$

$0 < k < +\infty$









$\Delta(s) = s^3 + s^2 + s + 1 + ks^2 = 0$ k به شکل کمیت ثابت حالاتی که k دارند را از بقیه

جدا کردیم . . .

$= 1 + \dfrac{ks^2}{s^3+s^2+s+1} \rightarrow (s+1)(s^2+1)$

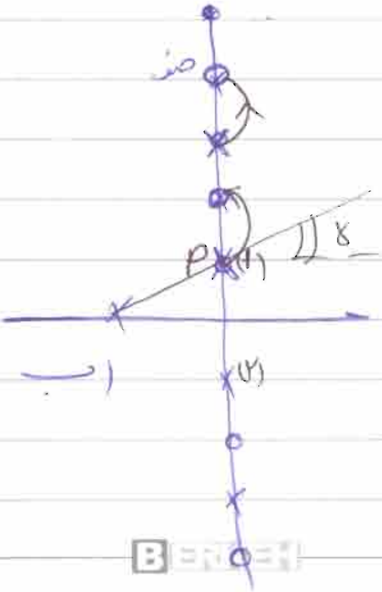
$G(s)\,H(s)$

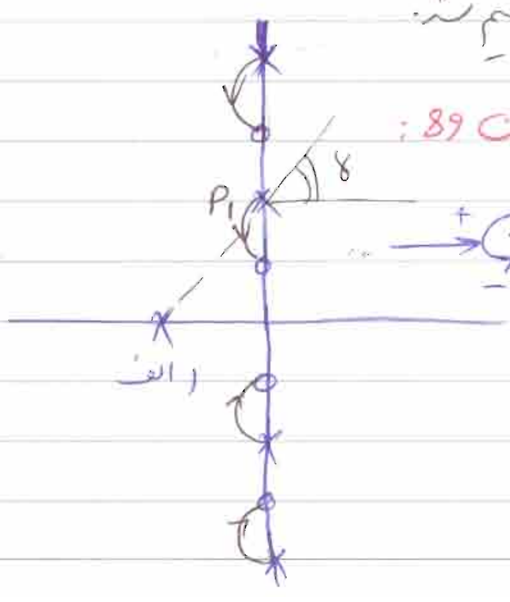
ام غلط است در ~~...~~ صفر دارد که در این شکل لحاظ شد.

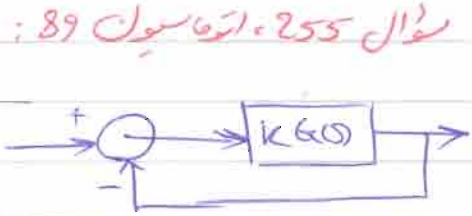
$\theta_p = 180 - (90+45) + (\underbrace{180}_{90+90}) = \boxed{220}$ ⟵ فقط در نمونه ۴ زاویه

قطب p درست ترسیم شد.

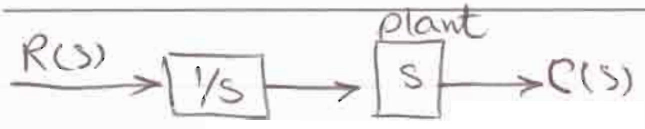
سؤال 255، اتوماسیون 89:



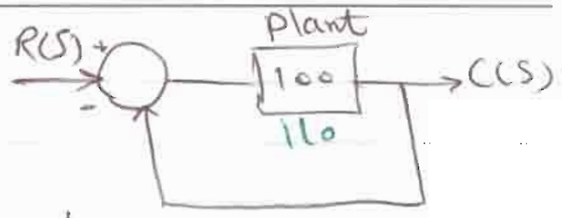




کدام سیستم پایدار است؟



$C/R = 1$



$\frac{C}{R} = \frac{100}{101}$ $\quad \frac{C}{R} = \frac{110}{111}$

سیستم به plant حساس است.

فرض کنید S_p^T را می‌خواهیم که p پارامتر تأثیرگذار در G(s) است:

$$S_p^T = \frac{\partial T}{\partial p}\times\frac{p}{T} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial G}\times\frac{\partial G}{\partial p}}_{\frac{\partial T}{\partial p}}\times\frac{p}{T}$$

قاعده زنجیره‌ای

$$S_{H(s)}^{T(s)} = \frac{\partial T}{\partial H}\times\frac{H}{T} = \frac{-G^2}{(1+GH)^2}\times\frac{H}{\frac{G}{1+GH}} = \frac{-GH}{1+GH}$$

$S_p^T = 1 \longrightarrow$ رابطه مستقیم دارد p و T

با افزایش GH حساسیت نسبت به G

$S_p^T = -1 \longrightarrow$ " " " معکوس "

کاهش ولی نسبت به H افزایش می‌یابد

$\frac{1}{1+L(s)} \longrightarrow$ تابع تبدیل حساسیت

$\frac{L(s)}{1+L(s)} \longrightarrow$ مکمل حساسیت

تابع تبدیل مکمل حساسیت

تابع تبدیل حساسیت به اضافه تابع تبدیل مکمل حساسیت برابر ۱ می‌شود.

PAPCO

اصلی‌ترین نکته در کنترل ملاحظات پایداری است.

$$G(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+5)}{(s+1)(s^2+4)(s^2+9)} \quad \text{الف}$$

مهم‌ترین نکته این است که بفهمیم این مسئله را

$$G(s) = \frac{(s^2+4)(s^2+9)}{(s+1)(s^2+1)(s^2+5)} \quad \text{ب}$$

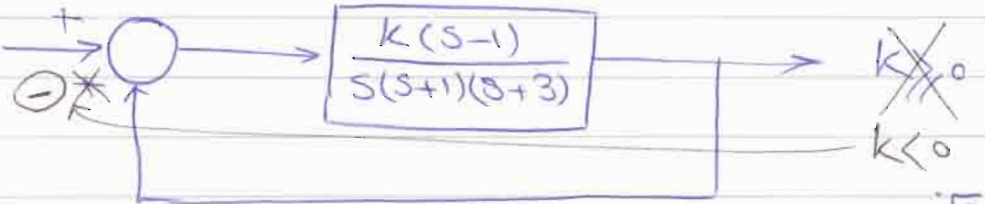
با پایداری روت لوکاس حل کنیم.

سیستم ب بدتر است. چون قطب ۱ و ۲ (از نظر قطب‌های دورتر) به هم نزدیک‌تر و نزدیک

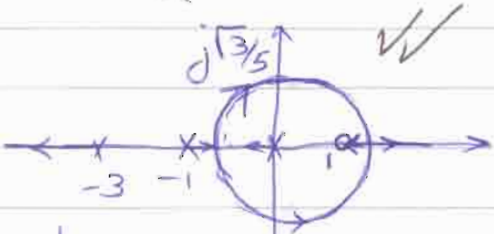
مبدا هستند. دو قطب در مبدا یعنی ناپایداری

$\theta_p = 180 - (90 + \delta) + (0) = 90 - \delta < 90 \longrightarrow$ یعنی ناپایدار است.

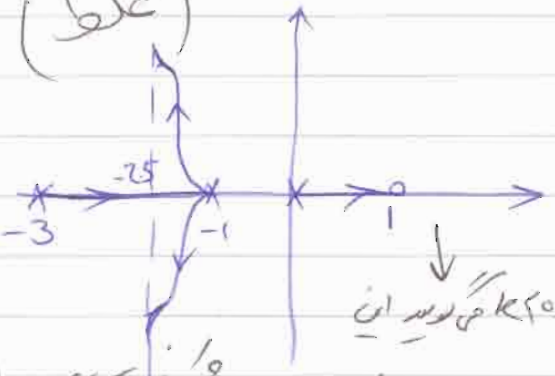
$\theta_{p_1} = 180 - (90 + \delta) + (2 \times 90) = 270 - \delta \longrightarrow$ پایدار است.



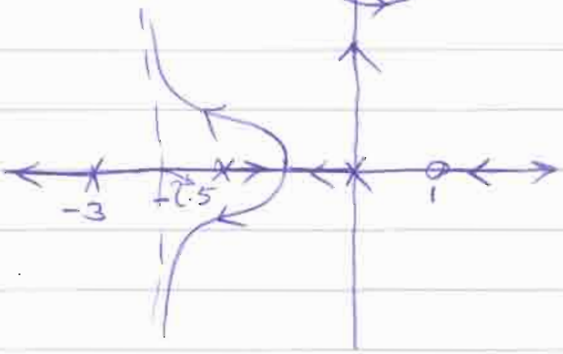
ص ۲۳۲ / ۸۹



(غلط)



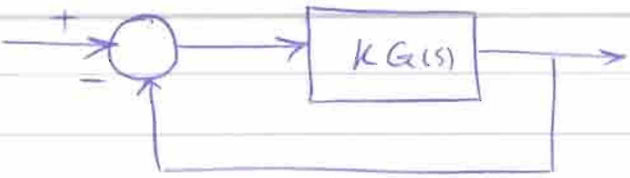
فقط عدد $k>0$ می‌نویسد این



قسمت باید جز راه‌کار هندسی باید و دقیق یک یا دو جا

داده می‌شود.

(نکته)



$\Delta(s) = 1 + kG(s) = 0$

$k>0 \qquad k<0$

$\Delta(s) = 1 - kG(s) = 0$

$k<0 \qquad k>0$

درصورت این سوال گفته $k \geq 0$ ← می‌گوییم فیدبک مثبت است. پس عکس فیدبک منفی $k<0$ اختیار می‌کنیم.

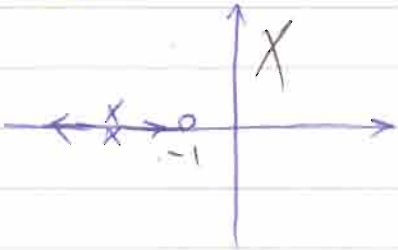
$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + (3+k)s - k$

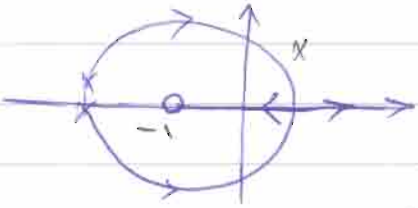
s^3	1	$3+k$
s^2	4	$-k$
s^1	$\frac{12+5k}{4} = 0 \rightsquigarrow \boxed{k = \frac{-12}{5}}$	
s^0	$-k$	

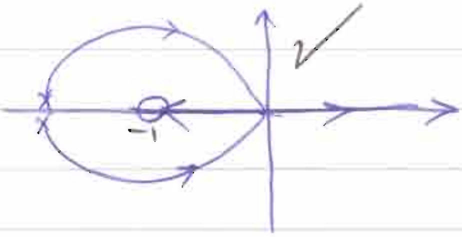
$\rightsquigarrow p(s) = 4s^2 + \frac{12}{5} \Rightarrow s = \pm j\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

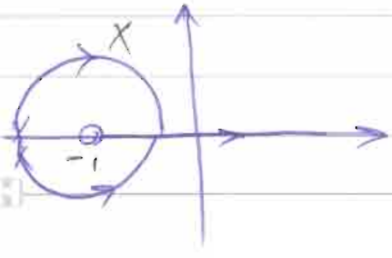
سوال 205 / الکترونیک 88:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + (\alpha+4)s + \alpha + 3} \qquad \alpha < 0$$









BERKEH

$$\Delta(s) = s^2 + (\alpha+4)s + \alpha + \overbrace{3+1}^{4} = 0$$

$$\rightarrow \Delta(s) = s^2 + 4s + 4 + \alpha(s+1) = 0$$

$$\rightarrow \Delta(s) = 1 + \underbrace{\frac{\alpha(s+1)}{s^2+4s+4}}_{GH} = 0 \qquad s = -1 \rightarrow \text{صفر تابع}$$

$\alpha > 0$ ← فقط سمت راست باید جزء مکان هندسی باشد ← ایرو شد.

$$\rightarrow \text{(x)}\ \alpha = -\frac{s^2+4s+4}{s+1} \rightarrow \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{(2s+4)-(s^2+4s+4)}{(s+1)^2} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{s^2+2s}{(s+1)^2} = 0 \longrightarrow s = 0 \xrightarrow{\text{در (x) بگذاریم}} \alpha = 4 \checkmark$$

$$\longrightarrow s = -2 \xrightarrow{\text{در (x) بگذاریم}} \alpha = 0\ \times$$

← چون $\alpha > 0$ است.

$s=-2$ قطب حلقه باز است.

$s=0$ نقطه شکست است. یعنی در $s=0$ دو شاخه باید به هم برسند.

سؤال ۱۹۲ / برق ۵۸:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$$

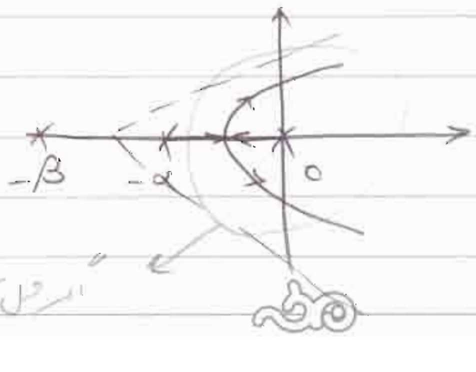
۱. نقطه شکست روی محور حقیقی در محل $-\frac{4}{9}$

۲. محل تلاقی مجانب‌ها $-\frac{11}{9}$ است. مرکز نوسانات چقدر است؟

محل تلاقی مجانب‌ها

$$\sigma = \frac{(0-\alpha-\beta)-(0)}{3-0} = -\frac{11}{9}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha + \beta = \frac{11}{3}}$$



$$k = -s(s+\alpha)(s+\beta) = -(s^3 + (\alpha+\beta)s^2 + \alpha\beta s)$$

$$\frac{dk}{ds} = (-3s^2 + 2(\alpha+\beta)s + \alpha\beta) = 0$$

$$= -3\left(\frac{-4}{9}\right)^2 + 2\left(\frac{+11}{3}\right)\left(\frac{-4}{9}\right) + \alpha\beta = 0$$

$$\rightarrow \frac{16}{27} - \frac{88}{27} + \alpha\beta = 0 \rightarrow \boxed{\alpha\beta = \frac{72}{27}}$$

$$\Delta(s) = s(s+\beta)(s+\alpha) + k$$

$$\Delta(s) = s^3 (\alpha+\beta)s^2 + \alpha\beta s + k \rightarrow \Delta(s) = s^3 + \frac{11}{3}s^2 + \frac{8}{3}s + k = 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & \frac{8}{3} \\ s^2 & 11/3 & k \\ s^1 & \frac{\frac{88}{9} - k}{11/3} & \\ s^0 & k & \end{array}$$

$$\frac{\frac{88}{9} - k}{11/3} = 0 \rightarrow k = \frac{88}{9}$$

$$\rightarrow P(s) = \frac{11}{3}s^2 + \frac{88}{9} = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{s = \pm j\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm j\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$e_{ss}\Big|_{tu(t)} = \frac{\alpha\beta}{k} = \frac{1}{k_s} = \frac{8/3}{k} = \frac{8/3}{88/11} = \boxed{\frac{3}{11}}$$

خطا به ورودی شیب ؟

؟

می‌توانست مقدار k یا داورشوت را بپرسد.

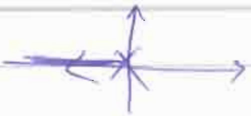
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

سوال 193 _ ص 88

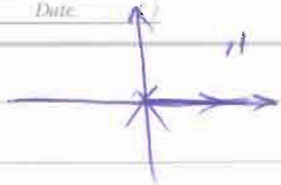
$$y = (1 \;\; 1) \qquad u = [-1 \quad -1]\, x(t)$$

$$\lambda \geq 0$$

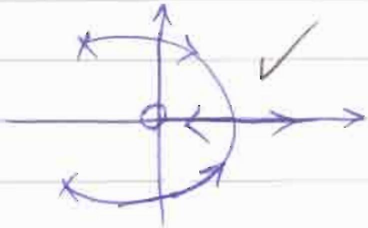
$$r = (0.5 + t)\, u(t)$$



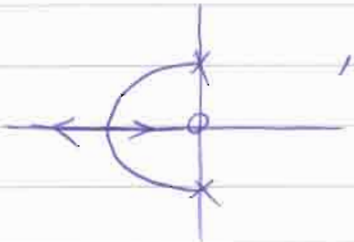
۲



۱



۴



۳

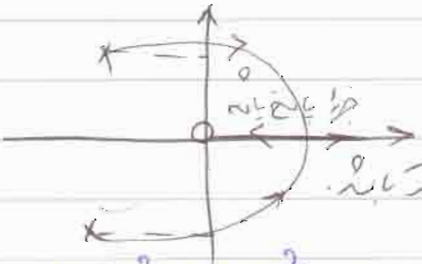
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} x$$

$$\Delta S = |SI - A| = S^2 + (\lambda + 1) S + 1$$

$$\Delta(S) = S^2 + S + 1 + \lambda S \rightsquigarrow \Delta(S) = 1 + \lambda \frac{S}{S^2 + S + 1}$$

GH

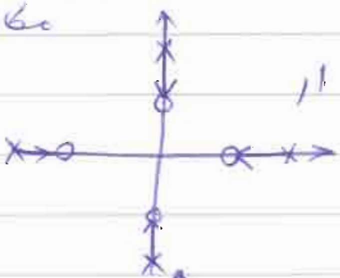


$\lambda < 0$

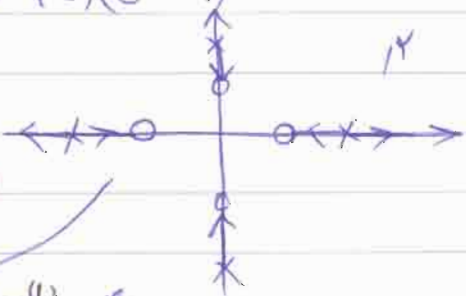
این یعنی k در جهت ... باشد.

تست 88 — سوال ۱۹۴:

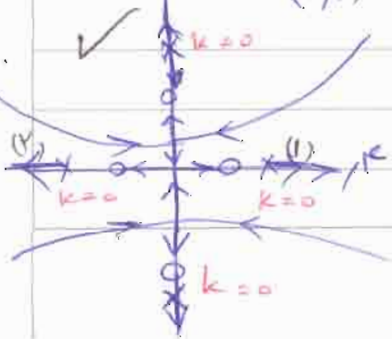
$$G(S) = \frac{k(S^2+5)(S^2-3)}{(S^2+6)(S^2-4)}$$ مکان ریشه $k<0$ ؟



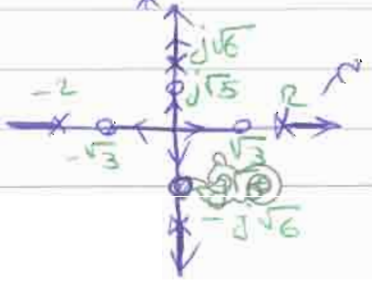
۱



۲



۴



۳

$$K=-\frac{\overbrace{(s^2+6)(s^2-4)}^{s^4+2s^2-24}}{(s^2+5)(s^2-3)} \rightarrow s^4+2s^2-15 \qquad \frac{dk}{ds}=-\frac{(4s^3+4s)(s^4+2s^2-15)-(4s^3+4s)(\text{صورت})}{(\text{مخرج})^2}=0$$

$$\frac{dk}{ds}=\frac{-(4s^3+4s)\,9}{(\quad)^2}=0 \rightarrow \begin{cases} s=0 \\ s=j \\ s=-j \end{cases} \rightarrow \underset{\text{می‌شود}}{k<0}$$

سوال: این سیستم proper است یعنی صفر و قطب در بی‌نهایت ندارد. (الف ۲) کجا می‌روند؟

این شاخه‌ها که از بی‌نهایت آمدند و به بی‌نهایت می‌روند. الزامی نیست که شاخه‌های روت لوکاس به هم وصل شوند

$$\Delta(s)=(s^4+2s^2-24)+k(s^4+2s^2-15)$$

$$\Delta(s)=(1+k)s^4+2(1+k)s^2-24-15k=0$$

هرچقدر k را کوچکتر کنیم قطب از مبدا دور می‌شوند دقیقا $k=-1.0001$ یعنی یک عدد کوچکتر از -1 می‌دهیم قطب‌ها حرکت می‌کنند و روی شاخه‌ها می‌نشینند. در واقع به ازای $k=-1$ قطب روی محور به سوی شاخه‌ها می‌روند و تغییر مکان می‌دهند.

پس چون سیستم proper شاخه به بی‌نهایت نرفته، گزینه ۴ صحیح است.

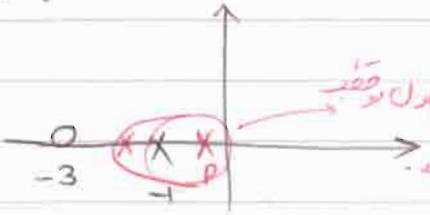
Year. 90 Month. 4 Date. ۲۵

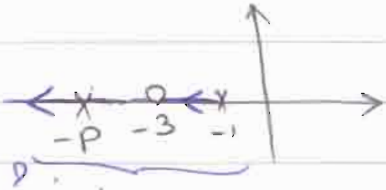
جلسه یازدهم

تست $\frac{93}{84}$ — به ازای $K>0$ ، $G(s)=\frac{K(s+3)}{(s+1)(s+p)}$ به ازای چه مقدار p، پاسخ گذرا میرا شدید است؟

مکان هندسی روی محور حقیقی سمت چپ

۱) $p>1$ ۲) $p>3$ ✓ ۳) $0<p<1$ ۴) $0<p<2$





$\underline{p>3} \leftarrow -p<-3$

تست $\frac{139}{87}$

$\Delta(s)=s^3+(a+b+k)s^2+(ab+kc+kd)s+kcd=0$ ← معادله مشخصه

$k, a, b, c, d>0$

قطب و صفر حلقه باز سمت چپ

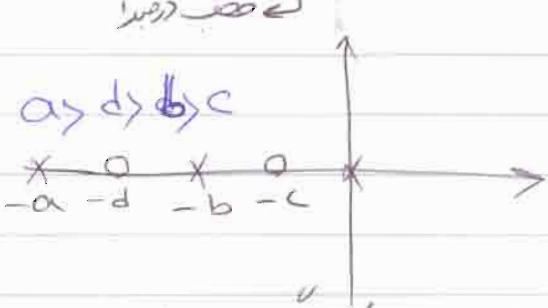
معادله مشخصه یعنی مخرج ریشه‌هایش همان قطب حلقه بسته است.

نقطه ریشه‌های معادله حقیقی منفی، باید مشخص دهیم که با یک ریشه لوکاس حل کنیم. می‌خواهیم $G(s)$ را درست کنیم:

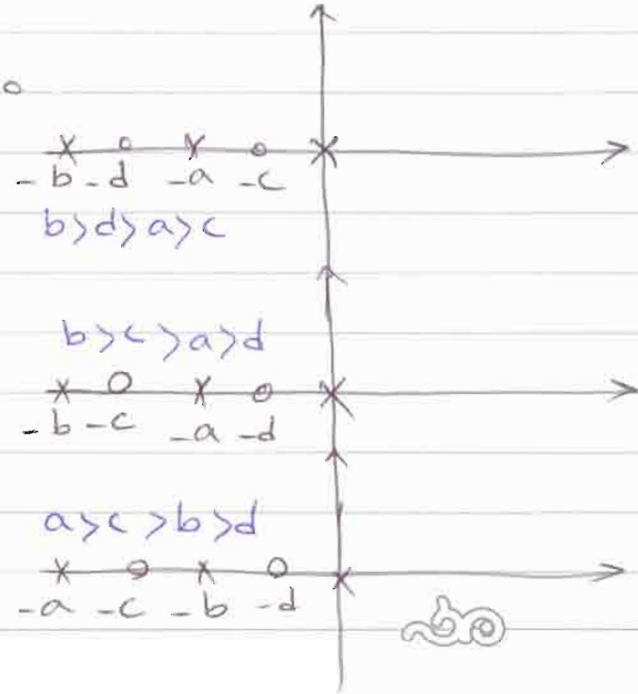
$\Delta(s)=s^3+(a+b)s^2+abs+k(s^2+(c+d)s+cd)=0$

$\Delta(s)=1+k\frac{(s+c)(s+d)}{s(s+a)(s+b)}=0$

قطب در مبدأ



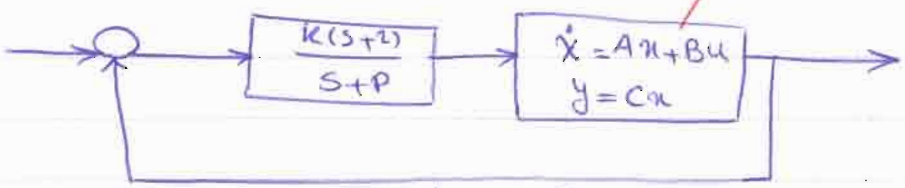
این همه حالت هر کدام از این‌ها باشه پاسخ است.



Subject:
Year. Month. Date:

این سیستم min-phase است. به ازای کدام شرایط حلقه بسته پایدار است؟

285 : اتوماسیون ۹۰



$$K>0 , \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\beta & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [1 , 0] x$$

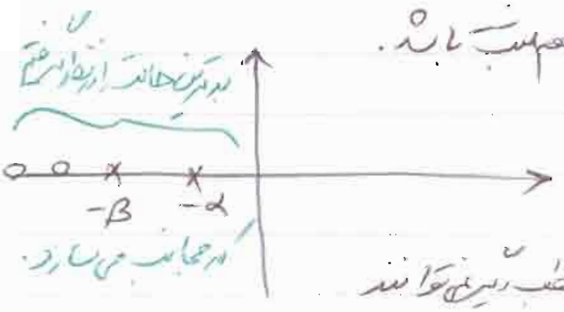
نکته: سیستم را min-phase می‌گوییم اگر همه صفرها و قطب‌هایش سمت چپ باشد.

تابع تبدیل فضای حالت فوق که کانونیکال کنترل‌پذیر است. $= \dfrac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$

دقت کنید چون حلقه بسته پایدار است یعنی همه سمت چپ است.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+(\alpha+\beta)s+\alpha\beta}$$

یعنی $\alpha>0$, $\beta>0$ ، هر وقت تعداد مجهولات زیاد بود بحث پایداری هم هست بهتر است اول لوکاس رسم کنیم. چون نقطه پایدار باید z و p هم‌علامت باشد.



وقتی که بدترین سؤال این است نمی‌دانیم باید محل برخورد مجانب‌ها را پیدا کنیم. اگر محل برخورد سمت چپ باشد قطب‌ها نمی‌توانند به سمت راست بروند.

$$\sigma = \frac{(-p-\alpha-\beta)-(-z)}{3-1} < 0$$

$$\rightarrow -p-\alpha-\beta+z<0 \longrightarrow z-p<\alpha+\beta$$

سوال 69
برق 95 : می‌دانیم معادله $x^3+7x^2+12x+k=0$ همواره سه ریشه دارد. ریشه‌های این معادله را برای $k=2,3,4,5$ حساب می‌کنیم. سپس k را 5 درصد افزایش می‌دهیم. به ازای کدام مقدار k بیشترین تغییرات در محل ریشه‌ها حاصل می‌شود؟ سوال مربوط به k در نقطه شکست است. چون در نقطه شکست اگر کمی k را اضافه کنیم محل ریشه‌ها تغییر می‌کند.

$$G(s)=\frac{1}{s(s^2+7s+12)}=\frac{1}{s(s+3)(s+4)}$$

$$k=-(s^3+7s^2+12s) \rightsquigarrow \frac{dk}{ds}=-(3s^2+14s+12)=0$$

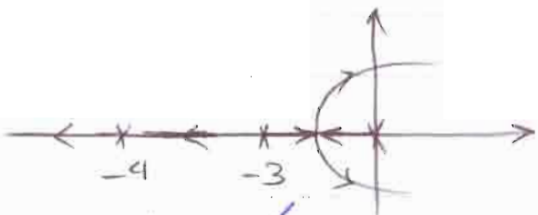
$$\rightsquigarrow \frac{-14\pm\sqrt{196-144}}{6} \quad \sqrt{196-144}\simeq 7.1$$

$\rightsquigarrow -3, \dots \rightsquigarrow$ قبول نیست

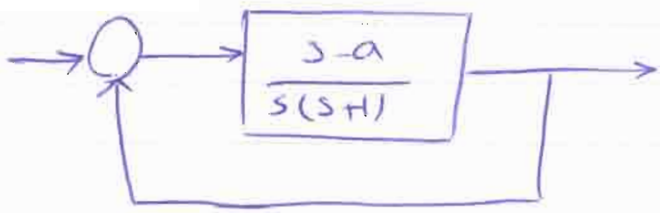
$\rightsquigarrow \frac{-7}{6}\simeq \boxed{-1}$

$s=-1 \rightarrow k\simeq 6$

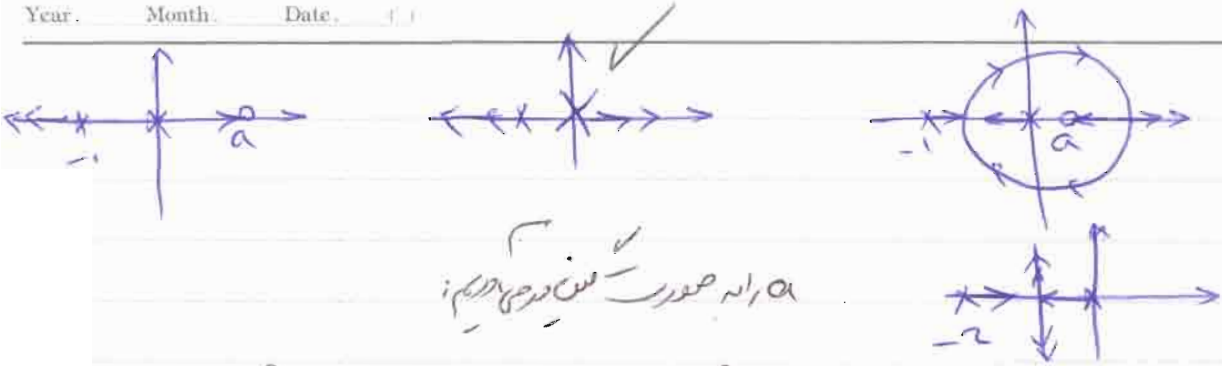
پس $k=5$ است.



سوال 79
برق 86 : مکان هندسی ریشه‌های تابع تبدیل حلقه بسته سیستم با فیدبک واحد منفی و تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{s-a}{s(s+1)}$ به ازای تغییرات $a\geq 0$ کدام است؟



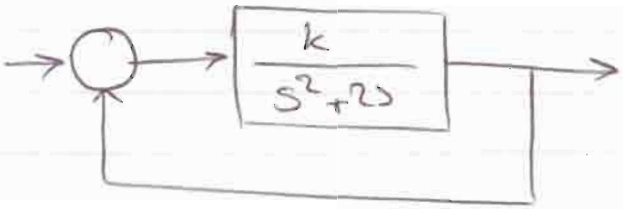
Subject :
Year . Month . Date .



a را به صورت گین در نظر می‌گیریم:

$$\Delta(s)=s^2+s+s-a=s^2+2s-a=0$$

$$\Delta(s)=1+\frac{-a}{s^2+2s} \quad -a=k \quad \rightarrow \quad G(s)=\frac{1}{s^2+2s}$$



For $k<0$

?

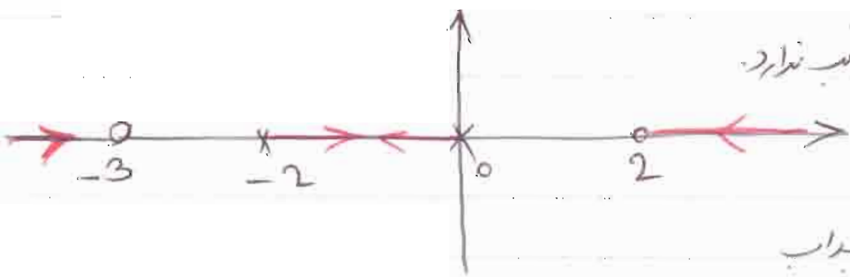
گزینه ۴ می‌شود چون $k<0$ است. او هم $a>0$ است.

۲۸۶
آزاد سال ۹۰

سیستم $G(s)=\frac{k(s-2)(s+3)}{s(s+2)}$ proper است، سیستم کمتی دارد، چون

proper است دارای مجانب نیست، بنابراین به مجانب نمی‌رود. مکان هندسی ریشه‌ها به ازای $k>0$ چه حالی است؟

سیستم proper مجانب ندارد.



گزینه‌های ۳، ۴ حذف می‌شوند جواب

باید گفت ما این است که از روی نقاط شکست بریم، روش بهتر را حل است.

PAPCO

Subject:

Year Month Date ( )

$\Delta(s) = s^2 + 2s + k(s^2 + s - 6)$

$\Delta(s) = (1+k)s^2 + (2+k)s - 6k$ و $k<0$ باشد محور $j\omega$ را قطع می‌کند.

$\Delta(s) = -s^2 + 12 = 0 \rightarrow s = \pm\sqrt{12} \rightarrow$ ~~[illegible]~~

$k = -2$

یعنی این نمودار محور $j\omega$ را قطع نمی‌کند یعنی گزینه ۴ صحیح است.

سوال 272 برق ۹۰: $G(s) = \dfrac{k(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$ باید درباره نقاط شکست بحث کنیم.

این سیستم ۴ نقطه شکست به ازای همه مقادیر k دارد. از ۷ تا نقطه شکست [illegible]

باید $\dfrac{dk}{ds}$ را پیدا کنیم درجه‌ی این معادله مقدار نقاط شکست است.

$G(s) = \dfrac{k(s^4 - 10s^3 + 35s^2 - 50s + 24)}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$

۲، ۸ " نه دارد

۳، ۶ " ۷ دارد

۴، ۹ " دارد

نکته: $(s+a)(s+b)(s+c)(s+d) = s^4 + (a+b+c+d)s^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)s^2 + (abc+abd+acd+bcd)s + abcd$

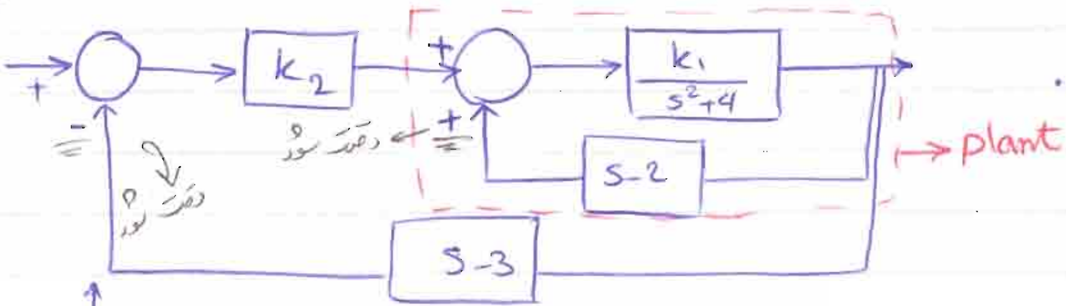
ضرب ۴ تا

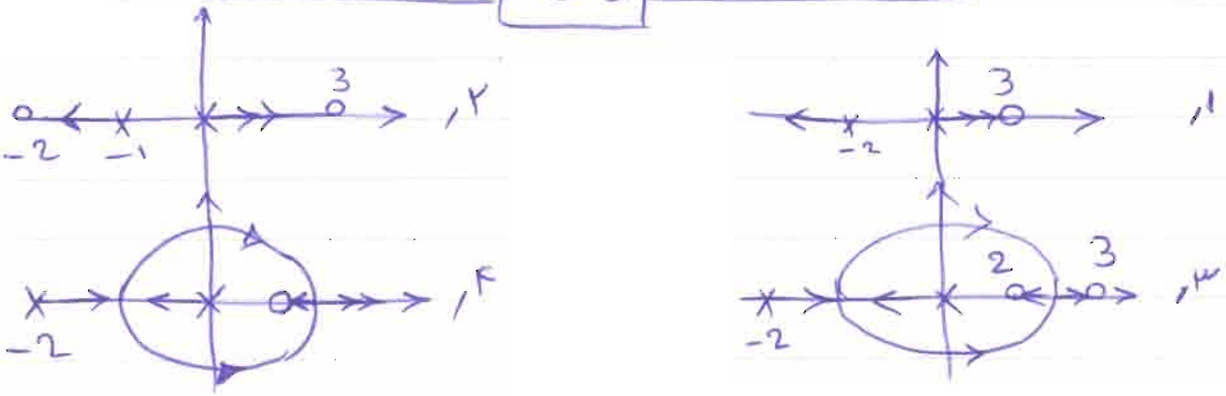
$$k = -\frac{s^4+10s^3+35s^2+50s+24}{s^4-10s^3+35s^2-50s+24}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{(4s^3+30s^2+\dots)(\text{مخرج } s^4 \text{ درجه}) - (4s^3-30s^2+\dots)(\text{درجه صورت } s^4)}{(\text{مخرج})^2} = 0$$

$=$ (دقت بدست آوردیم (درجه 6 است)) (گزینه ۳ جواب است)

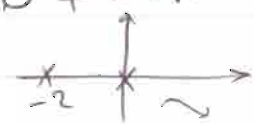
سوال ۹۰ : 273 در سیستم شکل زیر در صورتی که k_1 به گونه‌ای انتخاب شده باشد که plant اصلی در مرز پایداری باشد، مکان هندسی ریشه‌های سیستم حلقه بسته به ازای تغییرات $k_2 > 0$ چگونه خواهد بود.





$$T(S) = \frac{k_1}{S^2+4-k_1(S-2)} = \frac{k_1}{S^2-k_1S+4+2k_1} \rightsquigarrow k_1=-2$$

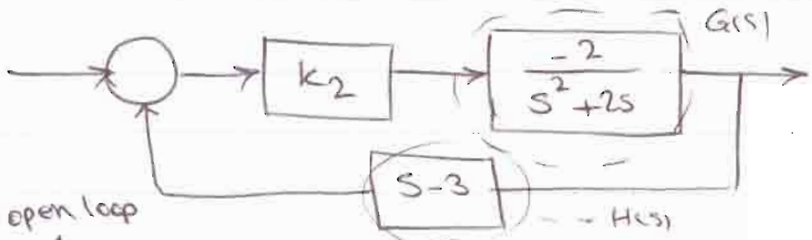
$k_1=-2$



مرز پایدار هست ولی نوسان ندارد

$k_2=0$ هم در نظر نیست چون plant در از بین می‌رود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



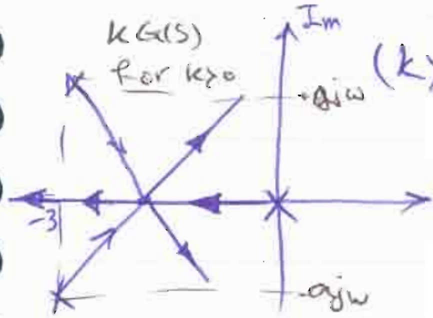
k=-2 است :

open loop

$$kG(s)H(s)=\frac{-2k_2(s-3)}{s^2+2s}\ \xrightarrow{-k_2=k'}\ \frac{k'(2s-6)}{s(s+2)} \qquad k'<0$$

گزینه ۱ پاسخ همین سوال ولی برای k>0 است. گزینه ۴ است.

271 / 90 : مکان هندسی ریشه های یک سیستم کنترلی با تابع تبدیل حلقه باز $kG(s)$ به شکل زیر است.



حداقل خطای ماندگار به ورودی $(1+2t)u(t)$ کدام است؟ $(k>0)$

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

تابع سیستم ۱ است. باید G(s) را حساب کنیم.

−2 نقطه شکست است.

$$G(s)=\frac{k}{s(s^2+6s+a)}$$

$$\Delta(s)=0 \quad k=-s(s^2+6s+a) \sim \frac{dk}{ds}=-(3s^2+12s+a)=0$$

نقطه شکست

$$\underline{\underline{s=-2}} \quad \frac{dk}{ds}=0 \longrightarrow \boxed{a=12}$$

$$\Delta(s)=s^3+6s^2+12s+k=0$$

s^3	1	12
s^2	6	k
s^1	$\frac{72-k}{6}>0$	
s^0	$k>0$	

$$\sim 0<k<72$$

$$k_r=\lim_{s\to 0} sG(s)=\frac{k}{12}$$

چون 2t داریم

$$e_{ss}=\frac{12}{k}\times 2=\frac{24}{k}$$

$$e_{ss_{min}}=\frac{24}{k_{max}}=\frac{24}{72}=\boxed{1/3}$$

6
تست 81

با توجه به سیستم $G(s)=\frac{k(s-1)}{(s-2)(s+2)}$ کدامیک از جبرانسازهای پیشنهادی امکان پایدارسازی حلقه بسته را دارد؟

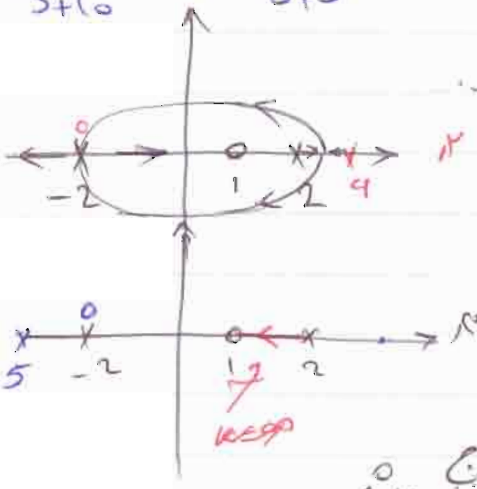
۱) $G_c(s)=\frac{s-2}{s-1}$ ← ناپایداری داخلی

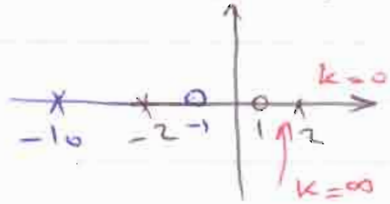
۲) $G_c(s)=\frac{s+2}{s-4}$

۳) $G_c(s)=\frac{s+2}{s+5}$

۴) $G_c(s)=\frac{s+1}{s+10}$

گزینه ۱ حذف صفر و قطب دارد. این سؤال با ریشه‌های روت لوکاس حل می‌شود.





شرط تثبیت با یک کنترل‌کننده پایدار یک سیستم ناپایدار را کنترل کنیم این است که تعداد قطب‌های سمت راست ناپایدار زوج باشد.

$G_c(s)$: کنترل‌کننده پایدار

51
تست 241

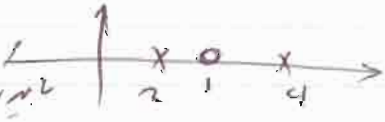
۱) $\frac{s-1}{(s-2)(s-4)}$

۲) $\frac{s+1}{(s-2)(s-4)}$

۳) $\frac{s-3}{(s-2)(s-4)}$ ← این را نمی‌توان پایدار کرد. چون تعداد فاصله کافی است [illegible]

۴) هر سه مورد. اگر یک صفر و قطب کنار هم باشند در سمت راست پایدار می‌شود.

با یک قطب اضافه هم در سمت راست.



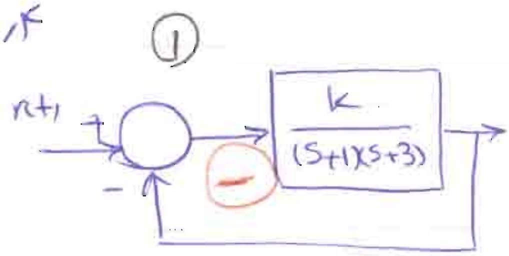
Subject:

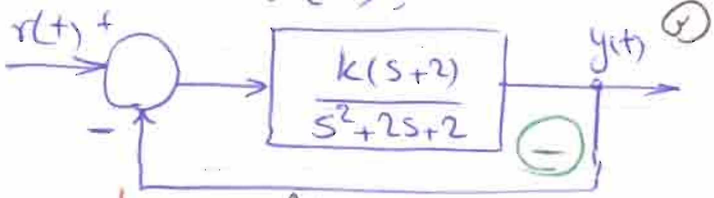
Year. Month. Date.

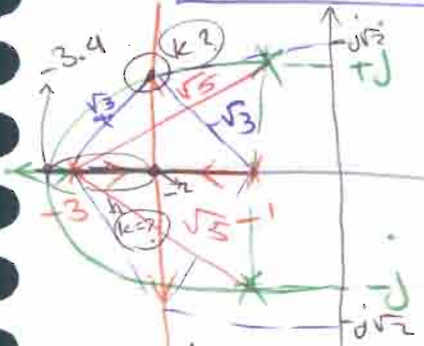
$\frac{59}{89\ \text{دی}}$ حدود k را چنان تعیین کنید که مکان هندسی ریشه‌ها دو سیستم داده شده زیر با هم تلاقی نداشته باشد؟

۱) $1<k<5$ ۲) $3<k<5$ ۳) $4<k<5$

۴) به ازای هر $k>0$ دو مکان هندسی را قطع می‌کنند.







$$k = -\frac{s^2+2s+2}{s+2}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{(2s+2)(s+2)-s^2-2s-2}{(\quad)^2} = 0$$

$$s^2+4s+2=0$$

$$s = \frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2} = -2\pm\sqrt{2}$$

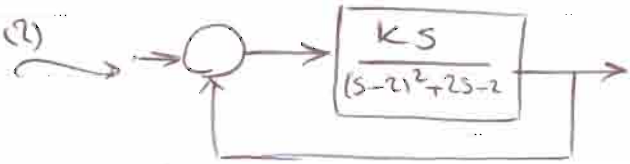
→ -3.4 ✓

→ -0.6

باید مقادیر k را زمانی که تقاطع داریم پیدا کنیم.

$$k = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{1} = \boxed{5}$$

close loop (2)



$$\Delta(s) = s^2+(k-2)s+2 = 0 \xrightarrow{k=2} \Delta(s) = s^2+2=0$$

$$\rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \boxed{k=3}$$

k =

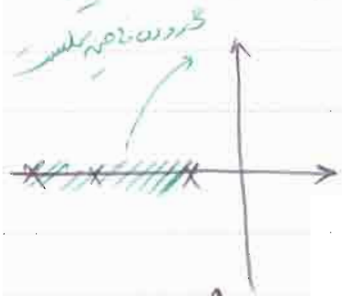
$$3<k<5$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سؤال: سیستم درجه سوم نقطه ترک (شکست) مختلط ندارد (جمله درست است)

سال ۹۰

یعنی قطب ← سه قطب دارد.



اگر نقطه شکست داشته باشد حقیقی است تغییری نمی‌کند ←

← چون با این شکل متقارن نمی‌شود تا قطب‌ها با هم ... نقطه شکست مختلط نداریم.

تحلیل پاسخ فرکانسی:

$$A\sin(\omega_0 t+\theta) \longrightarrow \boxed{T(s)} \longrightarrow A\,|T(j\omega)|\,\sin(\omega_0 t + \theta + \measuredangle T(j\omega))$$

روش‌های ترسیمی اندازه و فاز پاسخ فرکانسی ← ۱) دیاگرام بود Bode Diagram

۲) دیاگرام نایکوییست Nyquist plot → با ارتباط با نایکوییست با تمام اطلاعات خوانده شده را داریم

۳) چارت نیکولز Nichols chart

دیاگرام بود: هدف رسم $|G(j\omega)|$ و $\measuredangle G(j\omega)$ برحسب ω

$$G(s) = K\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(S+Z_i)}{S^N \prod_{j=1}^{n}(S+P_j)}\,e^{-T_d S}$$

$S = j\omega$ را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$G(j\omega) = k\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(j\omega+Z_i)}{(j\omega)^N \prod_{n=1}^{n}(j\omega+P_j)}$$

PAPCO

$$|G(j\omega)| = |k| \frac{\prod_{i=1}^{m} |s+z_i|}{\omega^{N} \prod_{j=1}^{n} |s+p_j|}$$

$$\measuredangle G(j\omega) = \measuredangle k + \sum_{i=1}^{m} \measuredangle (s+z_i) + (-T_d\,\omega) - \measuredangle (j\omega) - \sum_{j=1}^{n} \measuredangle (s+p_j)$$

به طور کلی یک سیستم از دیدگاه بود سهمی از ترکیب عناصر زیر دارد:

۱. k

۲. $(j\omega)^{\pm N}$

۳. $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^{\pm 1}$

۴. $(1 + T j\omega)^{\pm 1}$

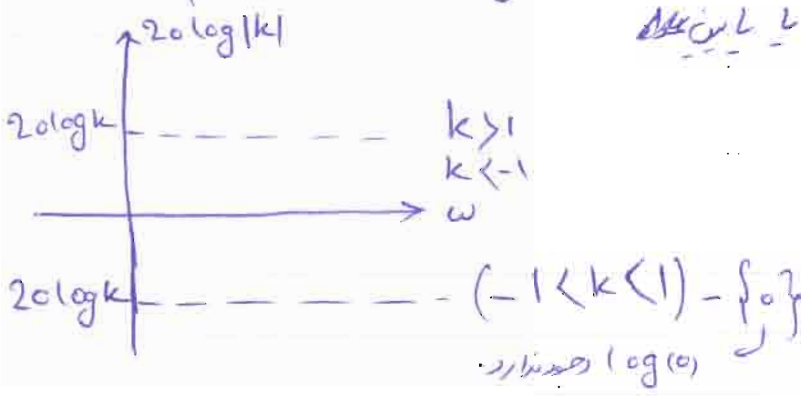
5. $e^{-T_d s}$

$G(j\omega) = k \,,\ |G(j\omega)| = |k|$

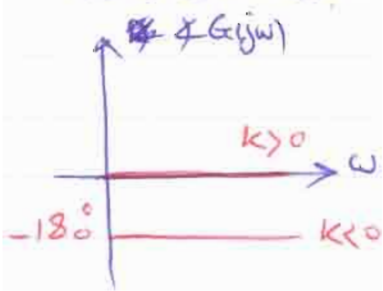
$20\log|G(j\omega)| = 20\log|k|$

یعنی فقط نقش گین در اندازه ۰dB بالا یا پایین بردن

۰ یا ۱۸۰



تغییرات کل صفر درجه است.



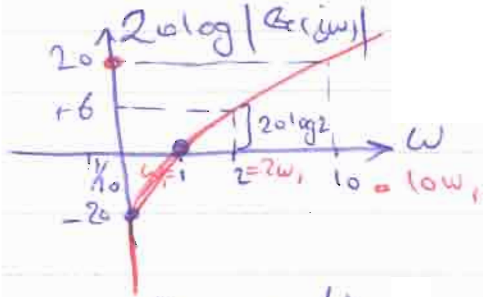
Subject:
Year. Month. Date.

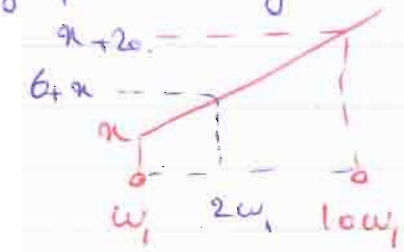
$G(s) = G(j\omega) = j\omega \rightarrow$ یعنی s خالص در صورت $(j\omega)^{\pm N}$ ۲

(+)

$|G(j\omega)| = \omega$

$20\log|G(j\omega)| = 20\log\omega$





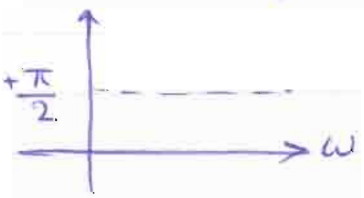
$+20\frac{db}{dec} = 6\frac{db}{oct}$

اگر فرکانس دو برابر شود 6 تا به اندازه اضافه می‌شود

" " " 10 " " 20 " " " ".

$\measuredangle G(j\omega) = \frac{\pi}{2}$

شیب ابتدای نمودار بستگی به s های خالص است.



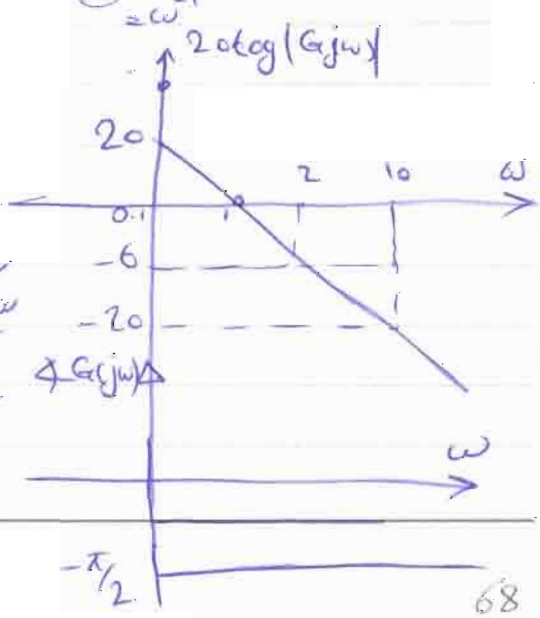
(−)

$G(j\omega) = j\omega^{-1}$

$\rightsquigarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} = \omega^{-1}$ و ~~$\measuredangle G(j\omega) =$~~

$20\log|G(j\omega)| = -20\log\omega$

$\boxed{\measuredangle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}}$



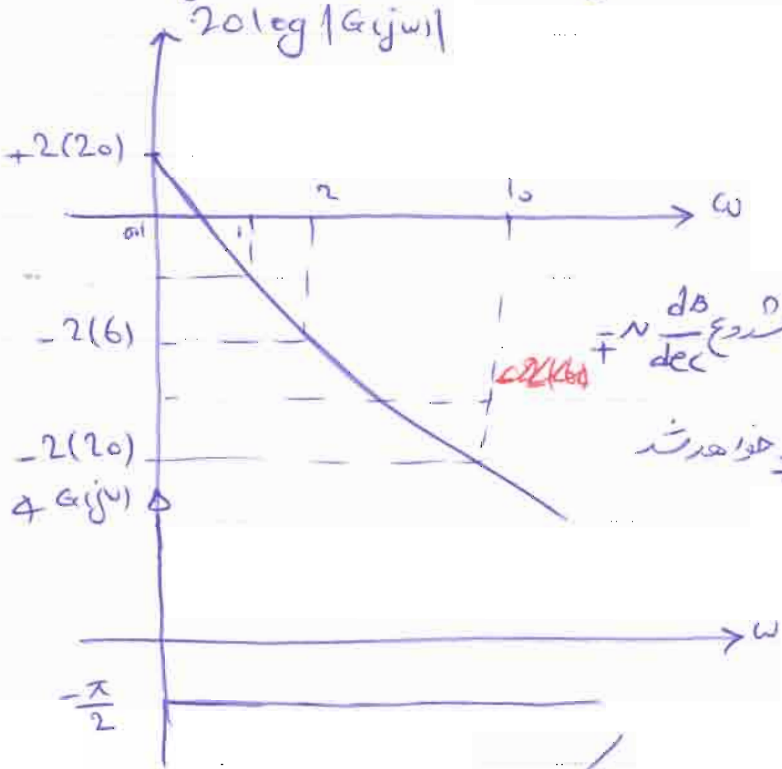
یعنی اگر سیستمی داشتیم در ابتدا شکل شیب ۲۰- داشتیم یعنی

تایپ سیستم یک است.

Subject:
Year. Month. Date.

$G(j\omega) = (j\omega)^{-2}$ $\quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2} = \omega^{-2}$

$20\log|G(j\omega)| = 20\log\omega^{-2} = -40\log\omega$



اگر N تا قطب داشته باشیم شیب شروع $\mp N\frac{dB}{dec}$ می‌شود و فاز آن برابر $\mp N\frac{\pi}{2}$ خواهد شد

$-2(40)\frac{dB}{dec}$

$-2(6)\frac{dB}{oct}$

اگر زاویه منفی باشد، در شروع زاویه کاهش پیدا می‌کند ← s در مخرج

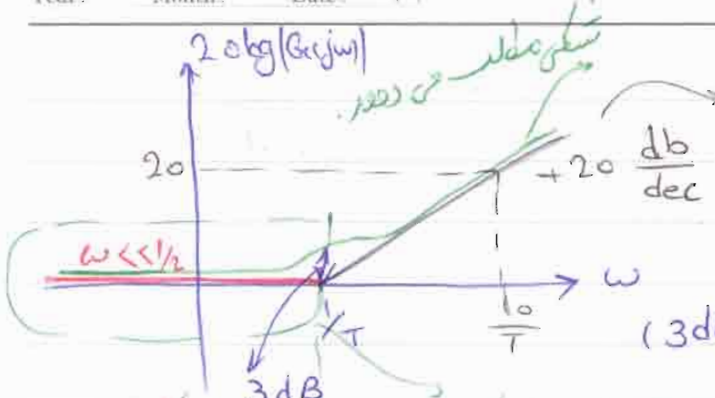
" " ثابت باشد ← عدد منفی در صورت داریم.

$G(j\omega) = 1 + Tj\omega = 1 + Ts$ $\quad |G(j\omega)| = \sqrt{1+T^2\omega^2}$

$20\log|G(j\omega)| = 20\log\sqrt{1+T^2\omega^2}$

$\measuredangle G(j\omega) = \tan^{-1} T\omega$

PAPCO



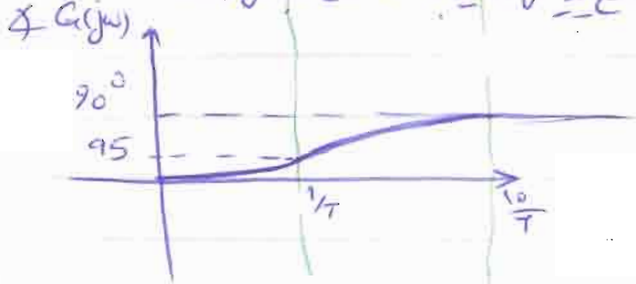
$\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow 20\log T\omega$

شکل‌ها تقریباً به شکل مطلق می‌شوند

فرکانس $\frac{1}{T}$ بیشترین اختلاف را دارد. (3dB)

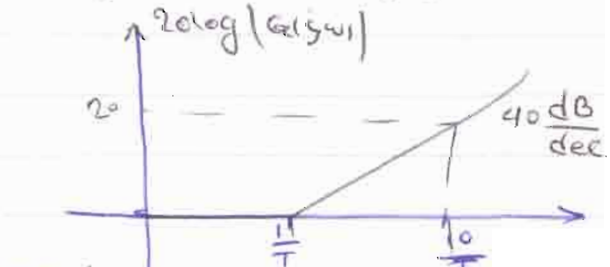
این قسمت عمودا یعنی $T=\infty$ است. ولی $T=\infty$ نداریم یعنی صفر در مبدا داریم.

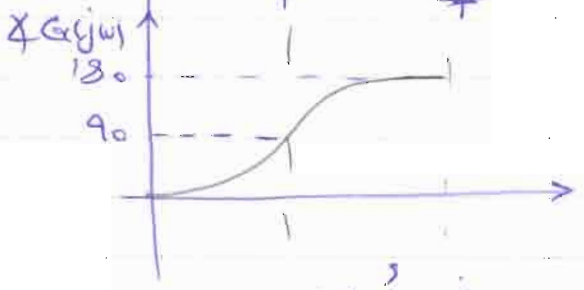
تا وقتی صفر نداریم شیب صفر است. وقتی صفر به وقوع پیدا می‌کند شیب 20dB بالا می‌رود.



$\measuredangle G(j\omega) = tg^{-1}\, T\omega$

$G(j\omega) = (1+Tj\omega)^2$ ~ (دو تا صفر تکراری در مبدا)

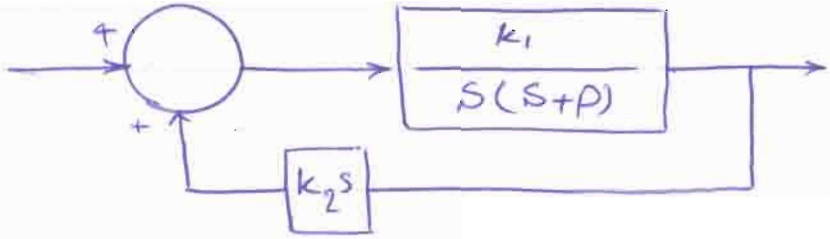




اگر $G(j\omega)=(1+Tj\omega)^{-1}$ باشد یعنی قطب ساده داریم.

Subject:
Year.　Month.　Date.　(　)

سؤال 60 ـ سراسری 85: $S_P^T = ?$



$$T(S) = \frac{k}{S(S+P)+k_1k_2S}$$

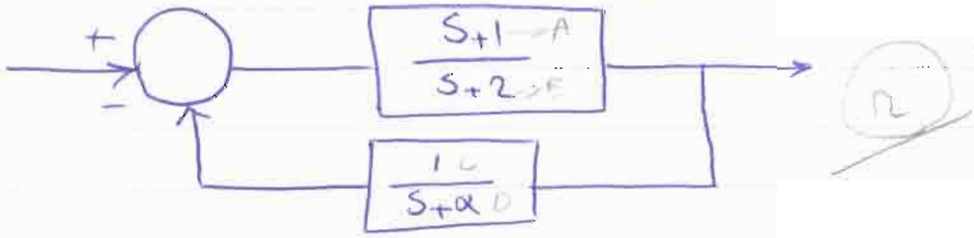
$$S_P^T = \frac{-k_1 S}{(S^2+PS+k_1k_2S)} \times \frac{P(S^2+P_S+k_1k_2S}{k_1} = \frac{-P(S)}{S^2+k_1k_2S+PS}$$

$$= \boxed{\frac{-P}{S+k_1k_2+P}}$$

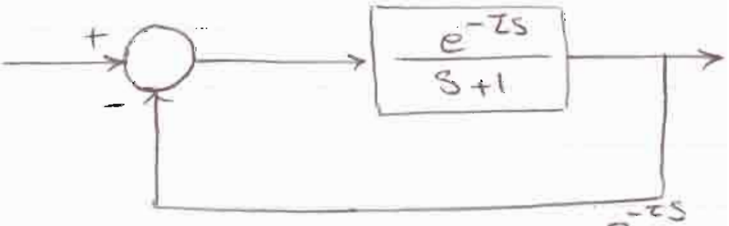
سؤال 18 ـ برق 82:

$\alpha = 1$

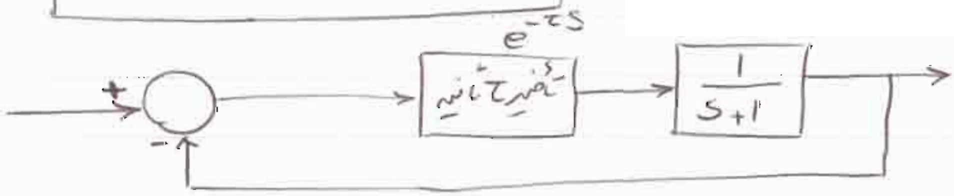
$S_\alpha^T = ?$



$T(S) = \frac{AD}{BD+AC}$



$\equiv$

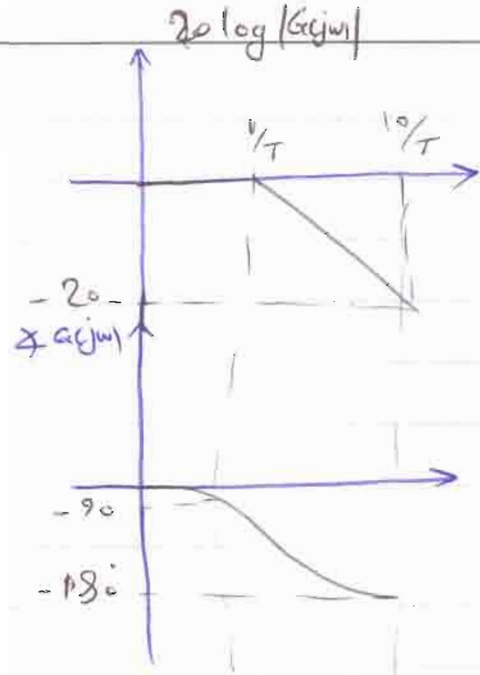


PAPCO

$$\rightarrow T(S) = \frac{e^{-\tau s}}{S+1+e^{-\tau s}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$G(j\omega) = (1 + T(j\omega))^{-1}$



مثال حالت های خاص:

$G(j\omega) = (1 - Tj\omega)$ ← صفر سمت راست داریم

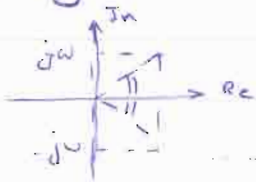
نکته: $(1 - T(s))$ با $(T(s) - 1)$ از لحاظ اندازه یکی هست ولی فاز آنها باهم فرق میکند.

$\measuredangle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$

صفر سمت راست از لحاظ زاویه مثل قطب

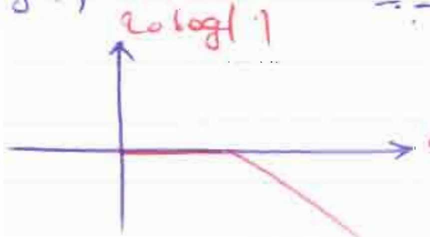
سمت چپ عمل میکند ولی اندازه‌اش مثل صفر سمت چپ است.

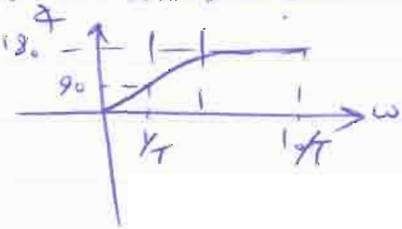
صفر شیب را زیاد میکند. قطب شیب را کم میکند.



$G(j\omega) = (1 - Tj\omega)^{-1}$

قطب سمت راست از لحاظ فاز، مثل صفر سمت چپ است!





وقتی شکل را نگاه کنیم از روی شیب کل و تنوع صفر و قطب را می‌فهمیم.

از روی فاز راست یا چپ بودن صفرها و قطب‌ها را تشخیص می‌دهیم.

جمع‌بندی:

صفر
قطب سمت چپ → شیب ± 20
→ فاز: (± 90) to (0)

صفر
قطب سمت راست → شیب ± 20
→ فاز: (∓ 90) to (0)

$$G(j\omega) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^{-1}$$

$0 < \zeta < 1$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

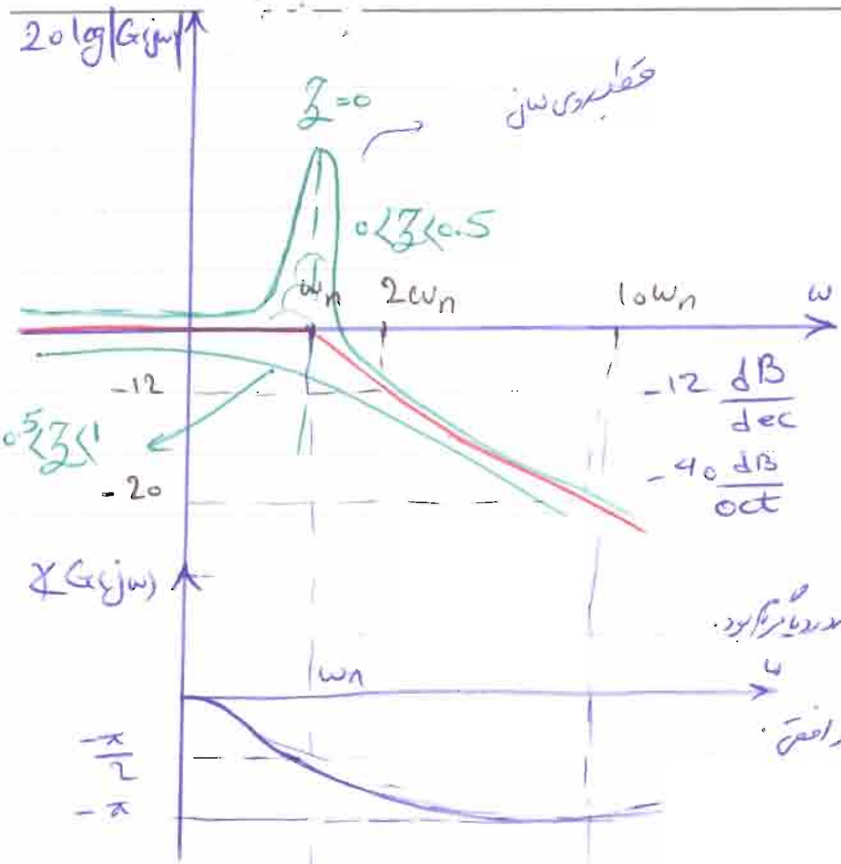
$$s = j\omega \rightsquigarrow G(j\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega}$$

$$\xrightarrow{\div \omega_n^2} G(j\omega) = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \quad , \quad \measuredangle G(j\omega) = -Tg^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

Subject:

Year. Month. Date.



$\omega \gg \omega_n$

$\hookrightarrow 20\log|G(j\omega)| = 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-2}$

$= -40\log\frac{\omega}{\omega_n}$

in (*) $\omega=\omega_n \Rightarrow$

$\Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta}$

$\rightsquigarrow 20\log|G(j\omega)| = -20\log 2\zeta$

حد ζ به صفر ← امکان وجود قله تند به روی بالا برود.

صفر روی ω_n ← min روی محور افقی.

فاز مستقیم ۹۰- باشد می‌تواند دخالتی در گنج باشد.

PAPCO

جلسه دوازدهم

	صفر – سمت چپ	صفر – سمت راست	قطب – سمت چپ	قطب – سمت راست
اندازه	افزایش $+20\frac{db}{dec}$ ، $+6\frac{db}{oct}$	افزایش $+20\frac{db}{dec}$ ، $+6\frac{db}{oc}$	کاهش $-20\frac{db}{dec}$ ، $-6\frac{db}{oct}$	کاهش $-20\frac{db}{dec}$ ، $-6\frac{db}{oct}$
فاز	$+90^\circ$ افزایش فاز	-90° کاهش فاز	-90° کاهش فاز	$+90^\circ$ افزایش فاز

اگر type منفی شود این عبارت + می‌شود (اگر s در صورت داشته باشیم)

شیب ابتدایی نمودار اندازه: $\left(-20\frac{db}{dec}\right)\times Type$ or $\left(-6\frac{db}{oct}\right)\times Type$

شیب انتهایی نمودار اندازه:

$$-20\,(\underbrace{n}_{\text{درجه مخرج}}-\underbrace{m}_{\text{درجه صورت}})\,\frac{db}{dec}$$

n یعنی تعداد قطب‌ها محدود است.

$(n-m)>0$ تعداد صفرهای در بی‌نهایت است.

m تعداد صفرها محدود است

$n-m<0 \Rightarrow$ تعداد قطب‌های در بی‌نهایت است.

اگر شیب انتهایی منفی شد ما سیستم proper خواهیم داشت.

اگر شیب " " مثبت باشد Improper است.

" " صفر " " Instrict " .

Subject:
Year. Month. Date.

* از لحاظ فاز صفر سمت چپ با قطب سمت راست، صفر سمت راست مثل قطب سمت چپ عمل می‌کند.

* خیلی مهم

فاز ابتدایی نمودار فاز:

$$\boxed{G(s)=\frac{k(s+a)(s+b)\cdots}{s^N(s+c)(s+d)\cdots}}\qquad \boxed{k>0,\ a,b,c,d,\ldots>0}$$

صفر و قطب‌ها سمت چپ

Minimum phase ⟵ همه صفر و قطب‌ها سمت چپ، هم k مثبت است

وقت شود

با فرض مذکور روابط صادق است

فاز ابتدایی نمودار فاز: $\boxed{-90^\circ \times \text{Type}}$

مثال در $\frac{-10(s+1)}{s(s+2)}$ ⟶ $+90^\circ\times 1=+90$

وقتی کند منفی ابتدای ‎-90‎ انتظار داریم فاز ‎+90‎ باشد

$$\frac{+10(s+1)}{s(s+2)} \rightarrow -90\times 1=-90$$

ولی اگر ‎+90‎ باشد لزوماً منفی نمی‌شود. یا یکی از صفرها سمت راست است.

فاز انتهایی نمودار فاز: $\boxed{-90^\circ(n-m)}$

درجه مخرج — درجه صورت

اگر فاز انتهایی صفر شود آیا هم توان برابر بودن را نتیجه گرفت؟ خیر، به k بستگی دارد.

مثلاً $\lim_{s\to\infty} G(s)=$ عدد

فاز صفر ⟵ عدد >0

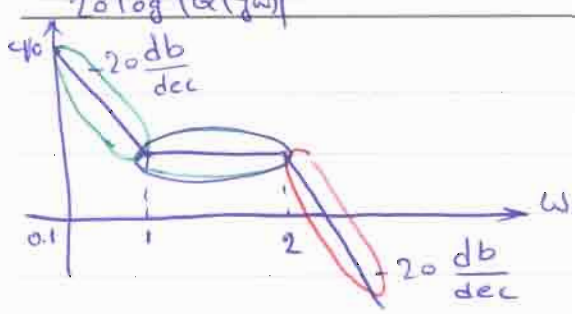
فاز -180° ⟵ عدد <0

$$G(s)=\frac{-10(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)} \rightarrow$$ فاز نهایی -180

PAPCO

Subject :

Year Month Date



فرض کنید نمودار اندازه سیستمی به شکل زیر است :

$$G(s)\ \frac{k\,(S+1)}{S(S+2)}$$

$$20\log\underbrace{|G(0.1j)|}_{100\to②} = 40$$

$$|G(0.1j)| = \left|\frac{k(j0.1+1)}{(j0.1)(j0.1+2)}\right| = |5k| = 100$$

$$\rightarrow \boxed{k = 20}$$

۱) $G(s) = \dfrac{20(S+1)}{S(S+2)}$

برای این نمودار 8 تابع تبدیل وجود دارد که اندازه نمودار بالا را دارند :

۲) $G(s) = \dfrac{20(S-1)}{S(S+2)}$ ۳) $G(s) = \dfrac{-20(S-1)}{S(S+2)}$ ۴) $G(s) = \dfrac{20(S+1)}{S(S-2)}$

۵) $G(s) = -\dfrac{20(S+1)}{S(S-2)}$ ۶) $G(S) = \dfrac{-20(S-1)}{S(S-2)}$ ۷) $G(S) = \dfrac{-20(S+1)}{S(S+2)}$

۸) $G(s) = \dfrac{20(S-1)}{S(S-2)}$

اگر فرض شود که صفر و قطب سمت چپ باشد باز هم تابع تبدیل

یکتا نمی‌شود. (دو تا تابع تبدیل بدست می‌آید). برای مثال اگر

$$G(s) = \frac{\pm 20(S+1)}{S(S+2)} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{if } k=-20 \rightarrow \varphi = +90 \\ \text{if } k=+20 \rightarrow \varphi = -90 \end{array}$$

Subject:
Year. Month. Date.

$\log_{10} 1 = 0$

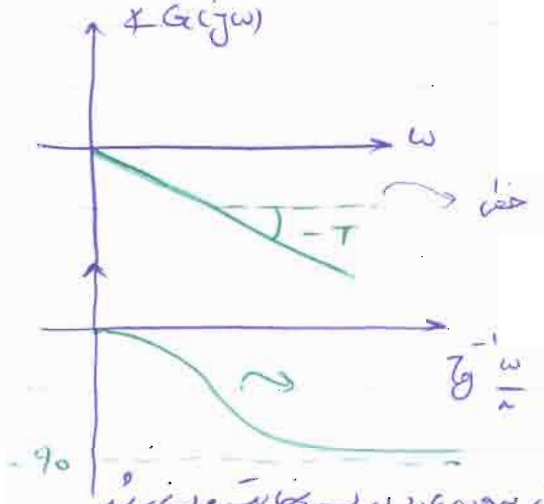
دیاگرام بود $G(s)=e^{-Ts}$

$G(j\omega)=e^{-Tj\omega}$

$20\log|G(j\omega)|=0$ یعنی تأثیری در اندازه ندارد.

$\measuredangle G(j\omega) = -T\omega$

ω یک عدد حقیقی مثبت است یعنی $\omega \in \mathbb{R}^+$ و از طرفی T از جنس زمان است. هیچ وقت منفی نمی‌شود. پس تأخیر فاز منفی خطی داریم.



group delay ← T

قطب سمت چپ یا صفر بسته است ←

اگر نمودار فاز مجانب داشت تأخیر ندارد. اگر نمودار فاز به هیچ عدد در بی‌نهایت میل نمی‌کند

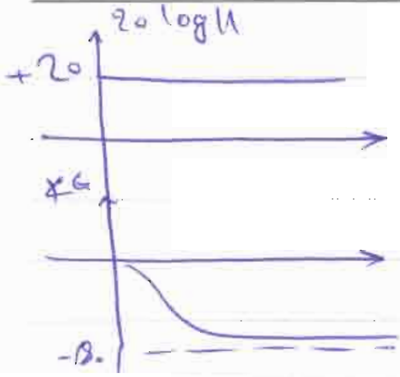
یعنی مجانب نداشت سیستم حتماً تأخیر دارد.

مثال) $G(s)=\dfrac{(1-s)e^{-Ts}}{s(1+s)}$

$$\measuredangle G(j\omega) = (-tg^{-1}\omega) - \left(\frac{\pi}{2}+tg^{-1}\omega\right) - T\omega$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.



سؤال ۹ - برق ۸۱:

۱) $10\,\dfrac{1+s}{1-s}$

۲) $10\,\dfrac{1-s}{1+s}$ — -90 سمت راست ، -90 سمت چپ ؛ -180

۳) $10\,\dfrac{1-s}{1+s}\,e^{-s}$

۴) $10\,\dfrac{1+s}{1-s}\,e^{-s}$

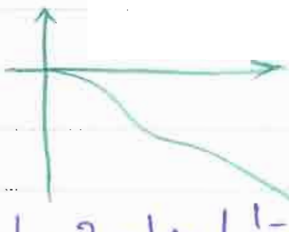
در انتها فاز به $+180$ میل می‌کند پس سیستم تأخیر ندارد.
به سمت بی‌نهایت

اگر قطب سمت چپ و صفر سمت راست و $k>0$ ← $\angle G(j\omega) = -180^\circ$

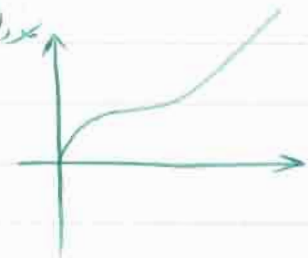
" " راست و " " چپ و $k<0$ ← $\angle G(j\omega) = 0$

سیستم All pass filter

نمودار گزینه (۱)



نمودار گزینه ۴



$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1-j\omega}{1+j\omega}\right| =$$

برق ۸۹ ، ۸۹ :

گزینه ۱ و ۴ قطعاً غلط است چون اگر $s=0$ شود اندازه قطعاً باید بیشتر از
که طبق نمودار
شود. ۱ و ۴ در این صدق نمی‌کند. گزینه ۲ بهتر است. قطب ۰.۱ هیچ نداره ست. (با توجه به فاز)

Subject:
Year.   Month.   Date

تست 89 / 52 : ۳ سه ردشد قطب خالص داریم.

گزینه ۲ درسته ← چون قطب 1000 اندازه 12 دارد   6 x 2
که قطب توان ۲ داریم

$$\underbrace{20\log|G(j\overset{10}{\omega})|}_{100} = 40 \longrightarrow$$ گزینه ۴

اندازه $|G(j\omega)|$ در $\omega = 10$ فقط در گزینه ۴ صدق می‌کند.

برق 86 / سوال 76 : گزینه ۳ و ۴ حذف است چون فاز در ۱ کم شده قطب سمت چپ داریم

چون اندازه ۴۰- است پس مرتبه ۲ است.

در 10^3 دو تا صفر اضافه می‌شود. گزینه دو حذف است چون صفرها روی محور است در 10^3

پس ۱ جواب است.

مکاترونیک 86 / 112 : ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب باشند چون در $s=0$ فاز صفر است. در ۲ و ۳

فاز ۱۸۰ است.

در 10^0 یک صفر داریم فاز کاهش دارد ← صفر سمت راست است. ← گزینه ۳ جواب است

در 10^1 یک قطب مرتبه ۲ داریم. چون فاز تغییر نکرده یک قطب سمت راست است یک قطب سمت

چپ داریم.

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x$$

: $\dfrac{87 \text{ بن}}{131}$

$$T(s) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -2 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -2 & s-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{2}{(s-1)^2}$$

$\log 2 = 0.3 \qquad \log 3 = 0.4 = 0.47$

$20\log |G(j\omega)| = \boxed{6}$ ، چون توان ۲ داریم گزینه ۳ ✓

$\dfrac{4500(s+2)^2}{s(s+10)(s+300)}$ ۳، $\qquad \dfrac{300(s+2)^2}{s(s+10)(s+20)}$ ۱، $\qquad$: $\dfrac{206 \text{ بن}}{\text{اتو سیل } 80}$

$\dfrac{600(s^2+s+2)}{s(s+10)(s+20)}$ ۴، ✓ $\qquad \dfrac{300(s^2+2s+4)}{s(s+10)(s+20)}$ ۲،

$-20 \leftarrow$ دخالص در خروج

$+20 \leftarrow$ از دو ، دو تا صفر داریم $\leftarrow$ گزینه ۴ حذف.

در 10 و 20 $\leftarrow$ قطب داریم $\leftarrow$ ۳ رد شد.

در $\omega = 300$ $\leftarrow$ اندازه صفر است. $\qquad 20\log|G(j300)| = 300$

$\rightsquigarrow \boxed{G(j300) = 1}$

در $\underline{\omega = 2}$ $\leftarrow$ اندازه 9.56 است.

$1, \xrightarrow{s=1} \dfrac{300\times 300^2}{300\times 300\times 300} = 1$

$2, \xrightarrow{s=1} \quad = 1$

$$\begin{cases} s = j2 \rightsquigarrow 1, = \dfrac{300\times 8}{2\times 10\times 20} = 6 \\ 4, = \dfrac{300\times 4}{2\times 10\times 20} = 3 \end{cases}$$

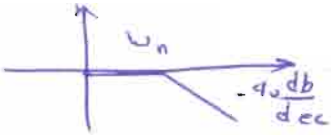
PAPCO

95 $\qquad 1, \rightsquigarrow 20\log 6 = \qquad$ ✓ $4, 20\log 3 = \underline{9.5}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

وقتی شیب ۴۰- تا پایین می‌رود یا بالا می‌رود یا دوتا صفر یا دوتا قطب داریم یا مختلط ها داریم.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$



$\frac{۲۲۵}{\text{مکاترونیک } 88}$: باید ها را بدست آوریم.

$$20 \log |G(j)| = 20$$

$G(j) = 10 \rightarrow$ ✓ گزینه ۳

$\frac{۲۴۰}{\text{برق } 89}$ (آزمون شامل حل شده با سیر مکانیکی ارشد)

فاز شروع -180 است. در $\omega_n = 2$ یک قطب مختلط داریم که $\zeta < 0.5$ باشد تا پیک ایجاد

۱ و ۳ که $\zeta > 0.5$ است رد می‌شود.

برای ۲ و ۴ باید ها بدست آوریم

if $\omega = 0.1 \rightarrow |G(j\omega)| = 100$

$$20 \log |10^2| = 40$$

also $|G(j0.1)| = \frac{4 \times 1}{(0.01)(4)} = \boxed{100}$ ✓ گزینه ۲ درست است

$\frac{۲۷۴}{\text{برق } 90}$:

$\frac{100}{0.1} = \frac{40}{1} \Rightarrow$ وقتی فرکانس ۱ است ۴۰ تا واحد پایین

یعنی در شروع قطب مرتبه ۳ داریم. ← ۴ و ۲ حذف شد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

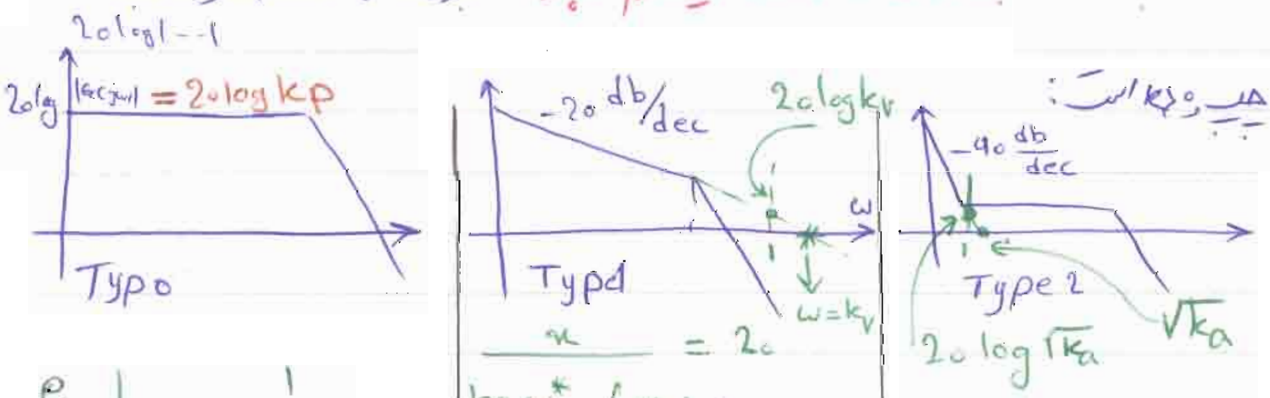
اگر s^3 داشتیم یعنی فاز شروع 270- باشد. دیگر ۲ دسته ۰ یعنی کلی – داشتیم که

فاز را 180+ برده است بالا. یعنی در شکل $\quad$ if $k<0$ فاز شکل $\longrightarrow$ توانش در حد بالا اما جواب حل k اصلی بدست آوردیم

تمرین (۱). $\quad$ if $k>0$ فاز شکل $\longrightarrow$ " " $k<0$ "

شکل روت لوکاس برای k مثبت (استاندارد درست است) وقتی $k<0$ بدست آوردیم باید توانش برعکس شود.

محاسبه خطا و ثابت های خطا از روی دیاگرام بود: برای حالتی که صفر و قطب ها سمت چپ و $k>0$ است:



$$e_{ss}\Big|_{u(t)} = \frac{1}{1+k_p}$$

$$\frac{x}{\log\omega^* - \log 1} = 20 \rightarrow 1 = 20\log k_v$$

102

اپسیلون 86

شیب شروع $= -20 \longrightarrow$ Type 1

when $\omega=1 \longrightarrow 20\log k_v = 10 \longrightarrow k_v=\sqrt{10}$ $\quad (10)^{1/2}$

PAPCO

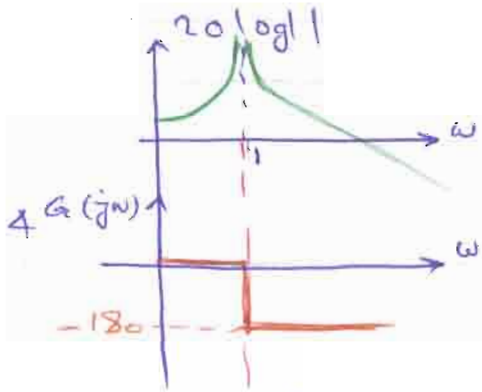
صفر و قطب روی محور jω :

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$s = j\omega \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2}$$

(مهم) آنهایی که صفر یا قطب روی jω دارند

فازشان به صورت پله‌ای تغییر می‌کند.



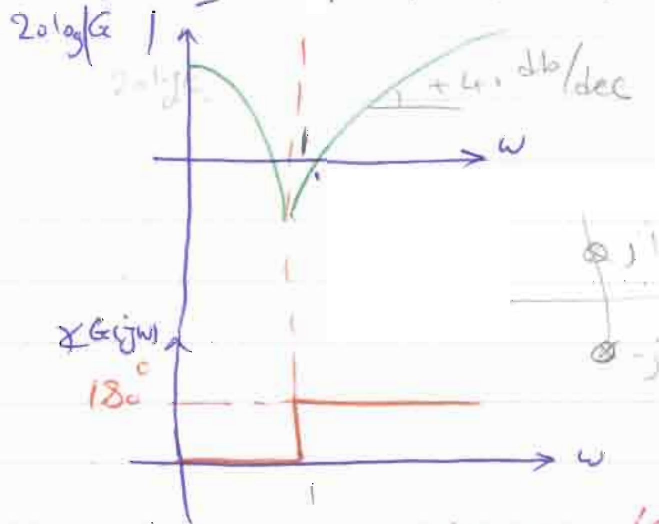
وجود مجانب قائم رو به بالا یعنی قطب روی jω.

$$G(s) = s^2+1 = 1-\omega^2$$

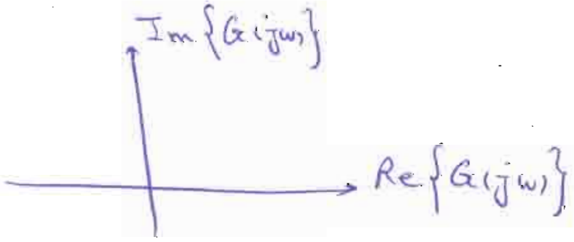
$20\log|1-\omega^2|$

وجود مجانب قائم رو به پایین یعنی صفر روی jω داریم.

$1-\omega^2$



دیاگرام قطبی (polar Diagram) or (Nyquist plot) : نایکوییست

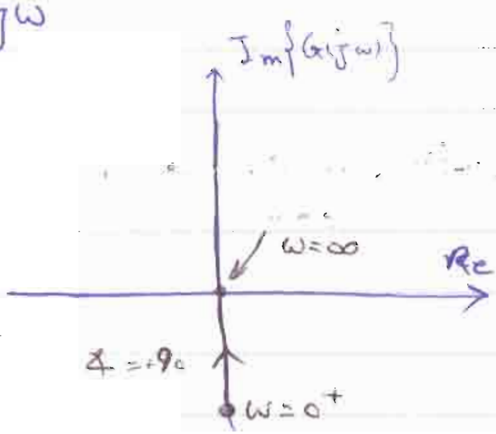


در هر نقطه قسمت Im و Re را پیدا می‌کنیم. همین طور نقاط پیدا شده را به هم وصل می‌شوند.

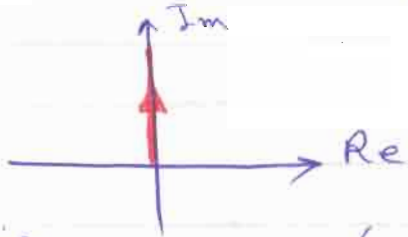
مثال) $G(s)=\frac{1}{s} \rightsquigarrow G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$

$G(0^+)=-j\infty$

$G(\infty)=j0$



$G(s)=s \rightsquigarrow G(j\omega)=j\omega$

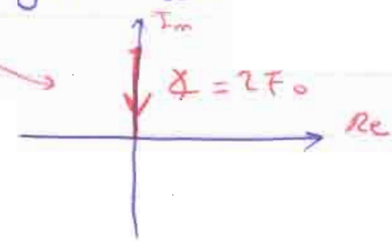


سیستم هایی که به صورت $\left(\underbrace{F(s)^{\overset{\text{توان زوج}}{2n}}}_{\text{زوج}}\right)\cdot\left(\underbrace{\begin{matrix} s \\ s^3 \\ s^5 \end{matrix}}_{\text{ضریب با توان فرد}}\right)$ باشند ناپایداری روی محور $j\omega$ خواهند داشت.

$G(s)=\frac{1}{s^3} \rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)(j\omega)^2}=\frac{j}{\omega^3}$

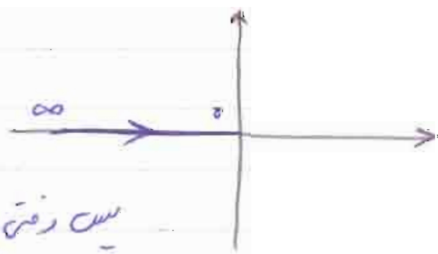
$\omega=0 \rightarrow G=+\infty j$

$\omega=\infty \rightsquigarrow G=+j0$



$G(s)=\frac{1}{s^2} \rightsquigarrow G(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2}$

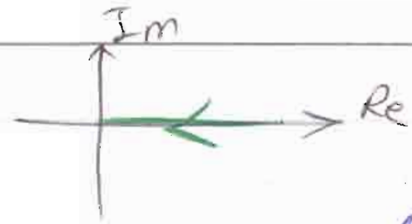
$\omega=+\infty \rightsquigarrow G(+\infty)=0$



پس وقتی فقط s با توان زوج داریم محور حقیقی خواهیم داشت

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$G(s)=\frac{1}{s^4} \rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{\omega^4}$$



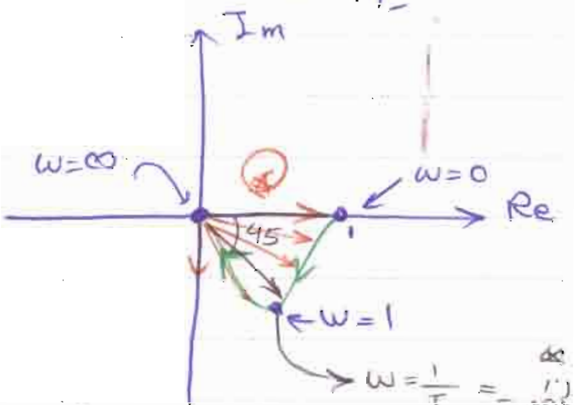
فرض کنیم $G(s)=\frac{1}{1+Ts}$ داشته باشیم،

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+Tj\omega}\times\frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega}=\frac{1}{1+T^2\omega^2}+j\frac{-T\omega}{1+T^2\omega^2}$$

می‌خواهیم به ازای ωهای مختلف Re, Im را ترسیم کنیم.

$$\omega=0 \longrightarrow \begin{cases} Re_0=1 \\ Im=0 \end{cases}$$

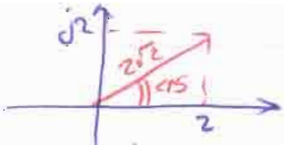
$$\omega=1 \longrightarrow \begin{cases} Re_1 < Re_0 \\ \dots \end{cases}$$



$$G(j\omega)=Re\{G(j\omega)\}+j\,Im\{G(j\omega)\}$$

$$=|G(j\omega)|\,e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$G(j\omega_0)=2+j2=2\sqrt{2}\,e^{j45^\circ}$$



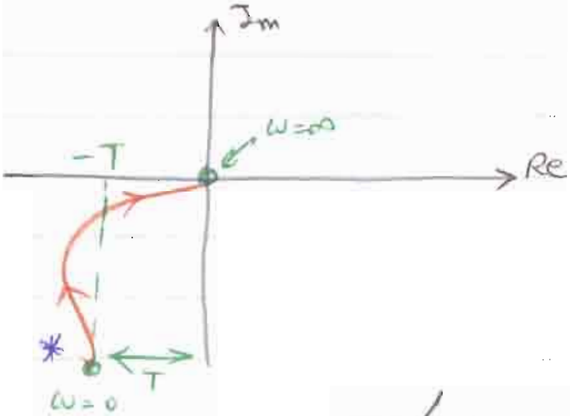
* در عوامل بودیم گفتیم به این سیستم زاویه از ۰ به ۹۰- می‌رود جواب در این شکل به جهت عقربه‌ها

دقت کن از صفر به ۹۰- رفته است.

* جایی که زاویه 45° شود نقطه وقوع قطب یعنی $\omega=\frac{1}{T}$ است.

$$G(S)=\frac{1}{S(1+TS)}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\;\frac{1}{1+Tj\omega}\;,\quad G(j\omega)=\frac{-T}{1+T^2\omega^2}+j\,\frac{-1}{\omega(1+T^2\omega^2)}$$



$\omega=0^+ \rightsquigarrow Re=-T$
$Im=-\infty$

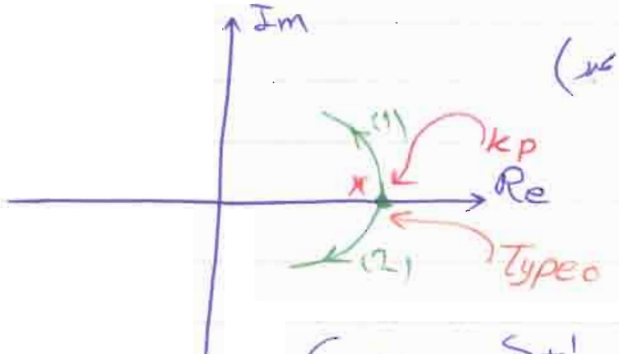
$\omega=\infty \rightsquigarrow Re=0$
$Im=0$

اگر $Re[\;]=0$ شود یعنی Im را قطع می‌کند
این اتفاق فقط در $\omega=\infty$ می‌افتد.
پس Im را قطع می‌کند. Re را هم به همین ترتیب قطع نمی‌کند

اگر s خالص در مخرج داشته باشیم نمودار از * آغاز می‌شود

فرض است که همه صفرها و قطب‌ها سمت چپ و $k>0$ است اگر سیستم s خالص

در مخرج نداشته باشد $(G(S=0))>0$



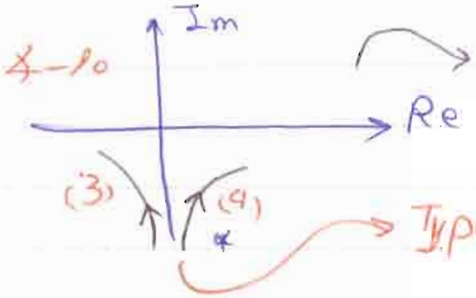
الگوریتم روی محور حقیقی آغاز شود $\rightarrow$ Type = 0

$$G_1(S)=\frac{S+1}{(S+2)(S+3)}$$ صفر زودتر رخ داده پس به بالا می‌رود (1)

$$G_2(S)=\frac{(S+2)}{(S+1)(S+3)}$$ قطب زودتر رخ داده پس به پایین (2)

با فرض پایداری * حدود kp است.

Subject:
Year: Month: Date:



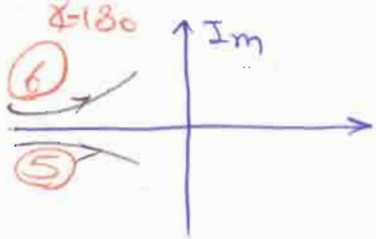
Type 1

* ← s خالص در مخرج داریم. فاز شروع ‎-90 است.

قطب سمت چپ زودتر رخ می‌دهد ← (3)

صفر " " " " ← (4)

$$G_3(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} \qquad G_4(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$



Type 2

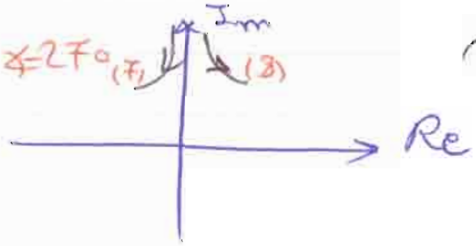
← در مخرج s^2 داریم

6 فاز منفی‌تر دارد ← قطب زودتر رخ داده.

$$G_6(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

5 ← اول صفر رخ داده است.

$$G_5(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)}$$

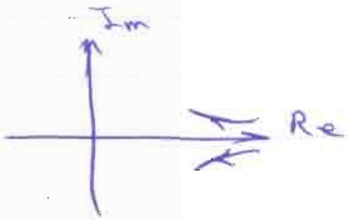


Type = 3

← در مخرج s^3 داریم.

$$G_7(s) = \frac{s+1}{s^3(s+2)}$$ اول صفر رخ داده

$$G_8(s) = \frac{s+2}{s^3(s+1)}$$ اول قطب رخ داده

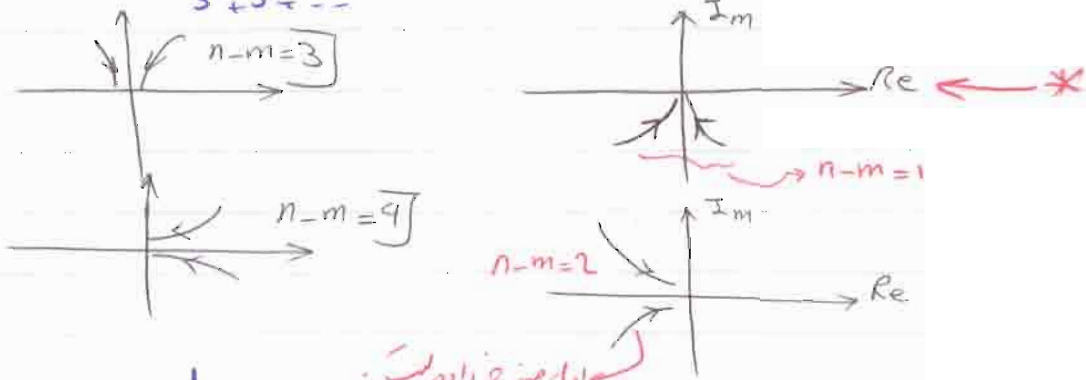


در مخرج s^4 داریم

* تمام سیستم‌های اکیداً سره نایکوئیستشان به مبدأ می‌رسد (درجه نسبی) یعنی در ∞ به مبدأ می‌رسند

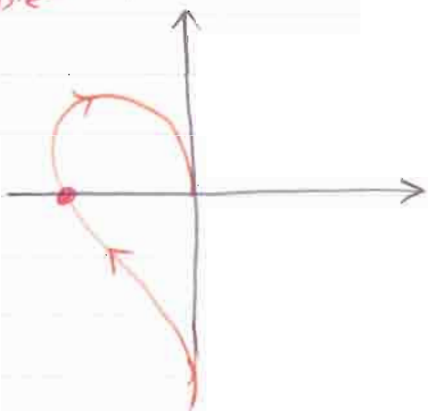
اگر سیستم proper باشد نایکوئیستش به محور حقیقی در بی‌نهایت می‌رسد.

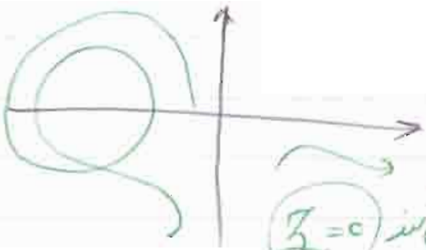
$$G(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + \cdots}{s^2 + s + \cdots} = s + 2$$ نایکوئیستش به مبدأ همگرا نمی‌شود



اول منفرج داده است.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$





سیستم درجه دو که اصطکاک ندارد (میرایی ندارد) نایکوئیست خود را قطع می‌کند $\zeta = 0$

$0 < \zeta < 0.5$

Subject:
Year: ۹۰ Month: ۷ Date: ۸

جلسه سیزدهم

نکته ۱: باید برای start نایکوییست نگاه کنیم: type است. — $\frac{276}{\text{برق ۹۰}}$

نکته ۲: در final با زاویه 360 رفته قوی مبدأ در هر چهار گزینه $n-m=0$ است.

با توجه به جهت نایکوییست اول صفر سمت چپ رخ داده است. پس گزینه ۳ درست است.

$\frac{277}{\text{برق ۹۰}}$

$G(s) = \frac{ks^2}{s^2+1} \longrightarrow$ تابع تبدیل حلقه باز است

با فرض فیدبک منفی: $\longrightarrow \Delta(s) = s^2(1+k)+1$

اگر ضریب $1+k$ مثبت باشد سیستم پایدار مرزی است پس:

$if\ (1+k)>0 \longrightarrow k>-1$ پایدار مرزی

$if\ (1+k)<0 \longrightarrow k<-1$ ناپایدار ← باید قطب سمت راست است

تا اینجا گزینه ۱ و ۲ حذف می‌شوند.

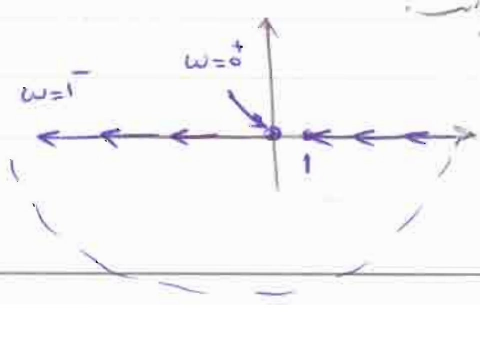
(این سیستم‌ها دارای نایکوییست خیلی مورد توجه است)

$k=1 \rightarrow G(s) = \frac{s^2}{s^2+1}$

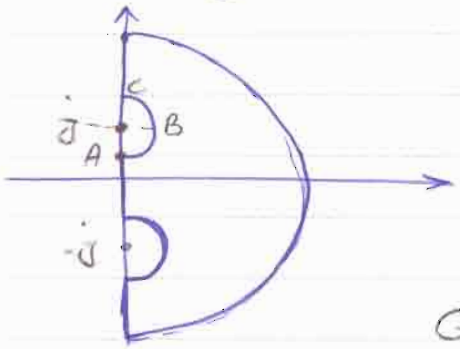
$G(j\omega) = \frac{-\omega^2}{1-\omega^2} + j0$ ← قسمت موهومی صفر است یعنی نمودار نایکوییست فقط روی محور حقیقی است.

گزینه ۳ جواب است.

$\omega: 0^+ \longrightarrow \omega = +\infty$



اگر به صورت $R(s^{2n}).s^{2n+1}$ بود نمودار نایکوئیست آن روی محور [illegible] می‌افتد



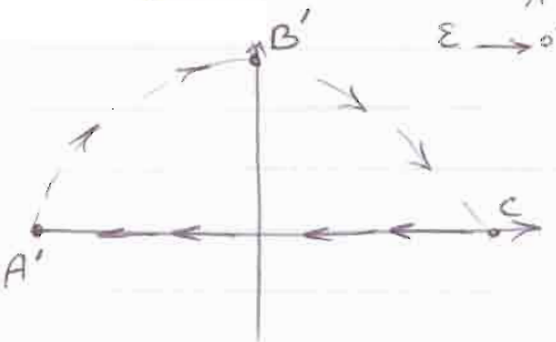
$$S = j + \varepsilon e^{j\theta} \qquad -\pi/2 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$S_A = j + \varepsilon e^{-j\frac{\pi}{2}} = j - j\varepsilon$$

$$\varepsilon \to 0^+$$

$$G(s_A) = \frac{-1-\varepsilon^2+2\varepsilon}{-\varepsilon^2+2\varepsilon} = -\infty = A'$$

$$\varepsilon \to 0^+$$

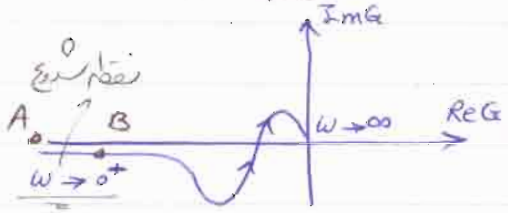


$$S_B = j + \varepsilon \to G(s_B) = \frac{-1+\varepsilon^2+2j\varepsilon}{\varepsilon^2+2j\varepsilon} \times \frac{\varepsilon^2-2j\varepsilon}{\varepsilon^2-2j\varepsilon}$$

$$= \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)+4\varepsilon^2+j(2\varepsilon)}{\varepsilon^4+4\varepsilon^2} = j\infty = B'$$

$$\varepsilon \to 0^+$$

$$G(s) = \frac{k(s+1/z)}{s^{\lambda}(s+\frac{1}{p_1})(s+\frac{1}{p_2})} \qquad k>0$$



241
89 برق

λ تایپ سیستم است. با توجه نقطه شروع $\underline{\lambda=2}$ است.

فاز اول $\underline{270-}$ است بین امتداد صورت و مخرج $\underline{3}$ است. منظور از زاویه‌ها این است به کدام نزدیکتر رخ داده است. با نقطه B نسبت به A مثبت‌تر است. $\leftarrow A=-\pi$

$$\measuredangle G(j\omega)\Big|_{\omega=0^+} > -\pi$$

$$\measuredangle G(j\omega) = tg^{-1} z\omega - (\pi + tg^{-1}p_1\omega + tg^{-1}p_2\omega) \xrightarrow[\substack{tg^{-1}x \simeq x \\ x \to 0}]{\omega \to 0^+} z\omega - \pi - p_1\omega - p_2\omega > -\pi$$

$$z\omega > p_1\omega + p_2\omega \longrightarrow \boxed{z > p_1 + p_2}$$

یادآوری: $\measuredangle a+jb = tg^{-1}\frac{b}{a}$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

$m>n \longrightarrow$ Improper ناسره

$m=n \longrightarrow$ proper سره

$m<n \longrightarrow$ strictly proper اکیداً سره

LIT

$e^{at} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow H(a)e^{at}$

$F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)} \longrightarrow N(s)=0 \rightsquigarrow$ Zeros of $F(s)$ صفرهای تابع تبدیل

$s=s_0 \rightsquigarrow$ صفر تابع تبدیل $\quad N(s_0)=0 \longrightarrow u(t)=ke^{s_0 t} \longrightarrow y(t)=0$

$D(s)=0 \rightsquigarrow$ Poles of $F(s) \longrightarrow$ قطب‌های تابع تبدیل

$S=S_0$: قطب تابع تبدیل $\longrightarrow \underline{C_{\underline{zs}}}(t)=ke^{s_0 t}$ پاسخ حالت صفر Zero state

$S=0,-1 \longrightarrow c(t)=k_1e^{0t}+k_2e^{-1t}$

$S=-1,-1 \longrightarrow c(t)=k_1e^{-t}+k_2te^{-t}$

اگر 3 مرتبه $=-1 \longrightarrow k_2t^2e^{-t}$

$S=-4\pm j3 \longrightarrow c(t)=ke^{-4t}\sin(3t+\theta)$

$S=-1,-1 \longrightarrow k_1e^{-t}+k_2te^{-t}+k_3t^4e^{-2t} \rightsquigarrow (S+1)^2(S+2)^5(S-3)$

میرایی به سمت Real قطب بستگی دارد. نوسان به سمت Img قطب بستگی دارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$C(s) = H(s)\,R(s) \qquad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

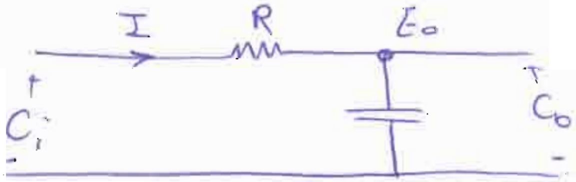
یا مرتبه order

3) تابع معادله دیفرانسیل:

$$\frac{d^{n}c}{dt^{n}} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}c}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dc}{dt} + a_0 c = b_m r(t) + \cdots + b_1 r' + b_0 r$$

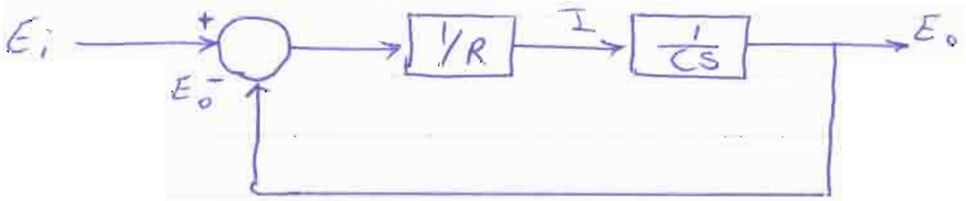
$$s^n C(s) + a_{n-1}s^{n-1}C(s) + \cdots + a_1 sC(s) + a_0 C(s) = b_m s^m R(s) + \cdots + b_1 sR(s) + b_0 R(s)$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

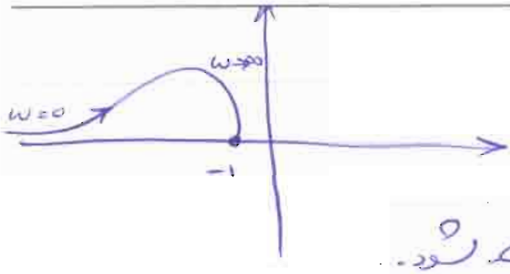


$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1/Cs}{\frac{1}{Cs} + R} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$I = \frac{E_i - E_o}{R} \quad , \quad E_o = \frac{1}{Cs} I$$



PAPCO



31 / برگ 83 : روش احتمال گزینه‌ها رد جای

۱. $s=j0$ بگذاریم باید جواب از جنس $+j\infty$ شود.

$$1)\ G(s)=\frac{-(s+1)(s+2)}{s^2}=\frac{-2}{-\omega^2}=+\infty \quad \times$$

$\omega=0^+$

۲) شکل گزینه ۲ رد می‌شود.

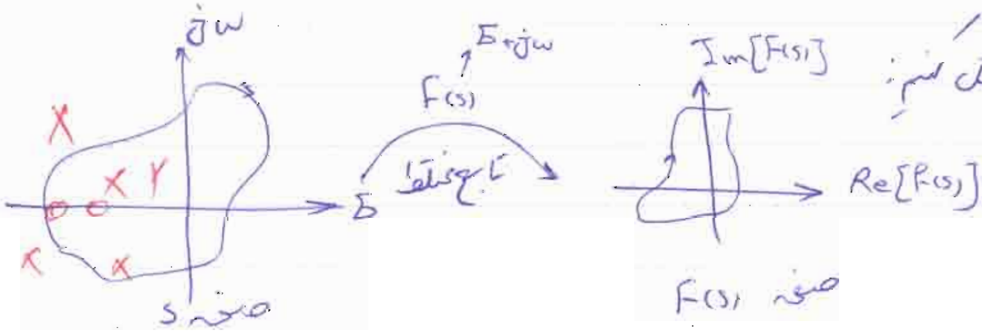
گزینه ۴ صحیح است چون باید صفر سمت راست رخ بدهد. (صفرها کاهش پیدا کرده یعنی قطب سمت چپ یا صفر سمت راست بلافاصله بعد از قطب) پس گزینه ۴.

128 / برگ 97 : از روی $\omega=0^+$ یعنی type=2 است.

فاز فاینال -270 است پس $n-m=3$ است. پس گزینه ۴ است.

دقت شود که در شکل صفرها دو نرخ را داراست. باید به نرخ داران صفر و قطب‌ها دقت کنیم

محک پایداری نایکوئیست: (اصل آرگومان): می‌خواهیم که شکلی را تحت یک نگاشت از یک صفحه به صفحه دیگر منتقل کنیم:



Subject:
Year. Month. Date. / /

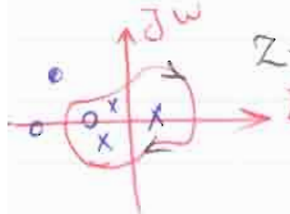
X : قطب‌های F(s)   O : صفرهای F(s)

یعنی اگر در صفحه s ، Z صفرها و P قطب‌ها باشد.

برای اینکه بدانیم شکل در صفحه F(s) چند بار مبدأ را دور می‌زند رابطه زیر را داریم:

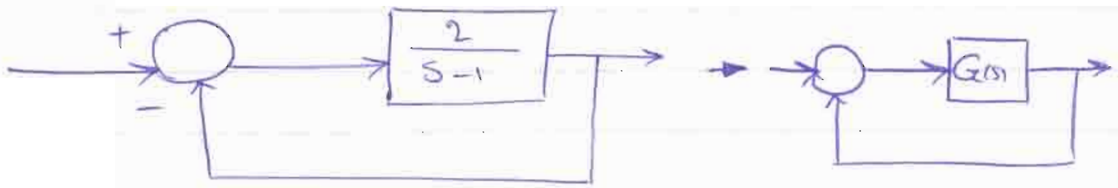
$$N = Z - P = 1 - 3 = -2$$

$Z=1 , P=3$



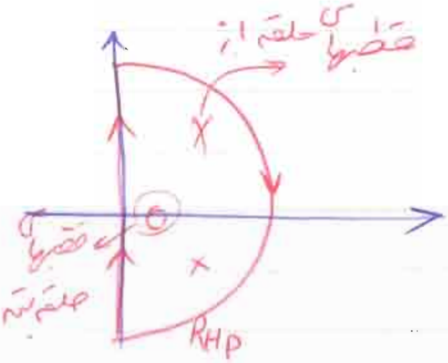
دو بار مبدأ را دور می‌زند

عکس جهت عقربه ساعت



نکته: Z و P تعداد صفرها و قطب‌هایی است که داخل Contour است.

$F(s) = 1 + G(s)$ مخرج حلقه بسته



(Z) صفرهای F(s) : قطب‌های حلقه بسته

(P) قطب‌های F(s) : قطب‌های حلقه باز

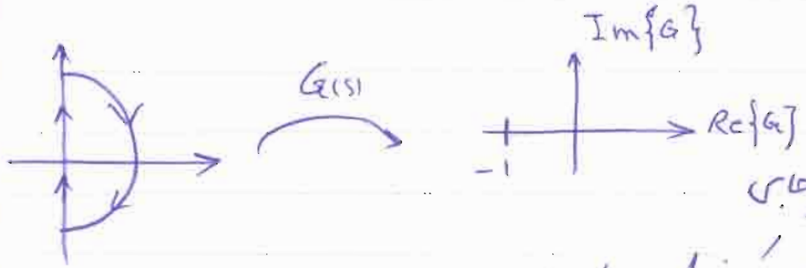
برای اینکه سیستم پایدار باشد باید همه قطب‌های حلقه بسته سمت چپ باشد:

$$N = Z - P$$

تعداد Z باید صفر باشد: شرط پایداری

در واقع اگر بخواهد پایدار باشد یعنی

$N = -P$ ← یعنی P بار حول مبدأ خلاف جهت Contour دور بزند



$F(s) = 1 + G(s)$

یعنی می‌توانیم به جای

F(s) ، G(s) رسم کنیم ولی حول ‎-1‎ .

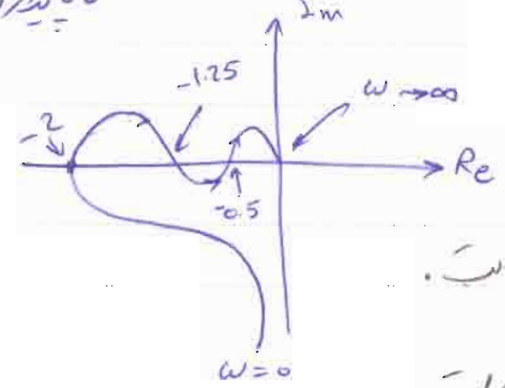
ما از روی نایکوئیست حلقه باز ، پایداری حلقه بسته را تشخیص می‌دهیم.

نکته:

اگر $P=0$ باشد نمودار نایکوئیست از روی ‎-1‎ رد شده باشد یعنی مرز پایداری یعنی قطب صفر در راست اتفاق افتاده است. یعنی روت لوکاس محور $j\omega$ را قطع کرده است

اگر $P=0$ و ‎-1‎ را یک بار دور بزند ⟵ $N=1$ ⟵ $Z=1$ ⟵ در حلقه بسته یک قطب ناپایدار داریم

برق 83 : 34



$R[G(s)]$ و $Im[G(s)]$ است.

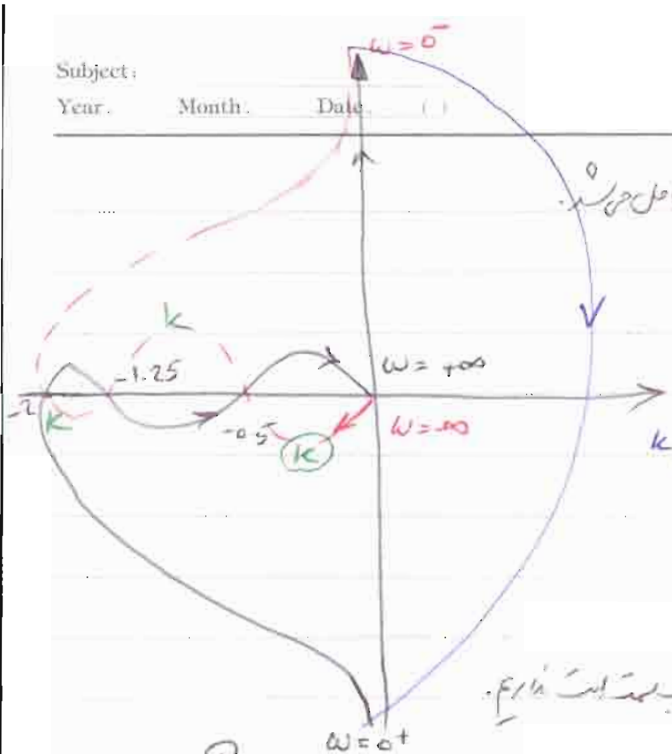
نایکوئیست سیستم به ازای $k=1$ کشیده شده است.

سیستم مینیمم فاز یعنی در نایکوئیست $P=0$ است.

در این سؤال نایکوئیست محور حقیقی را چند بار قطع کرده است. انگار روت لوکاس چند محور $j\omega$ را قطع کرده است. یعنی پایداری مشروط.

اول باید نمودار نایکوئیست را کامل کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



تایپ ۱ است ۰ اگر تایپ ۲ بود یک دایره کامل می‌شد.

به ازای هر تایپ یک نیم دایره داریم.

k ← ما به ازای k=1 رسم کردیم. به ازای همه مقادیر k

همه شکل در یک k ضرب می‌شود.

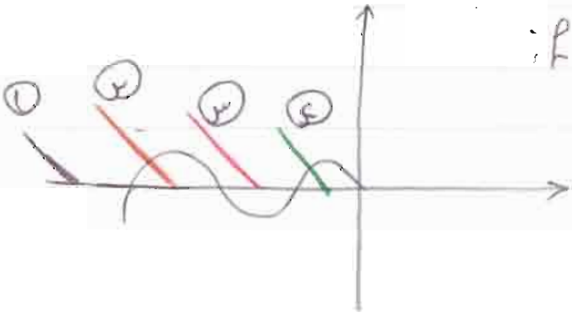
P=0 است چون در نیم صفحه راست ← صفر قطب سمت راست داریم.

① if $-2k > -1 \rightsquigarrow N=0 \rightarrow Z=0 \rightarrow k<\frac{1}{2}$

② if $-2k<-1<-1.25k \rightsquigarrow N=2 \rightarrow Z=2 \rightarrow 0.8>k>0.5$

③ if $-1.25k<-1 \rightarrow N=0 \rightarrow Z=0 \rightarrow 0.8<k<2$

④ $-0.5k<-1<0 \rightsquigarrow N=2 \rightarrow Z=2 \rightarrow k>2$



① → پایدار حلقه بسته

② → ناپایدار با دو قطب RHP

③ → پایدار حلقه بسته

④ → ناپایدار با دو قطب در RHP

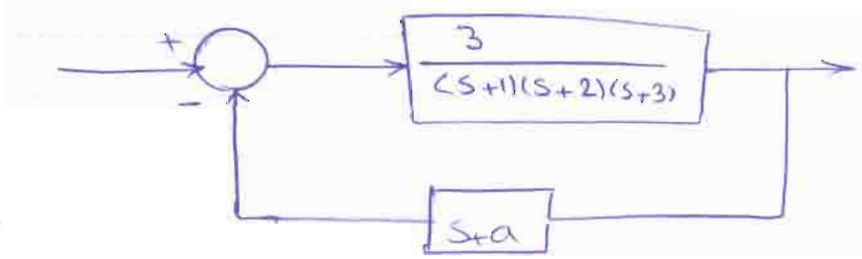
از بین ۱۳ ، $0.8<k<2$ و $k<1/2$

Subject:
Year. Month. Date

سؤال 96 / سراسری ۹۶ ، ۱، ۲ هستند صفر و قطب سمت راست دارند.

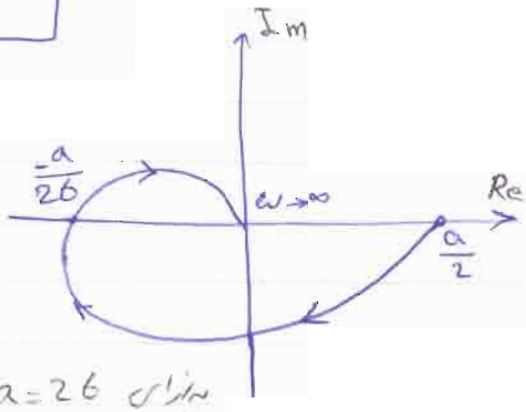
گزینه ۳ صحیح است. یعنی سیستم مینیمم فاز شد درحالی‌که نامینیمم است.

77 / 86 ترم



$$G(S)=\frac{3(S+a)}{(S+1)(S+2)(S+3)}$$

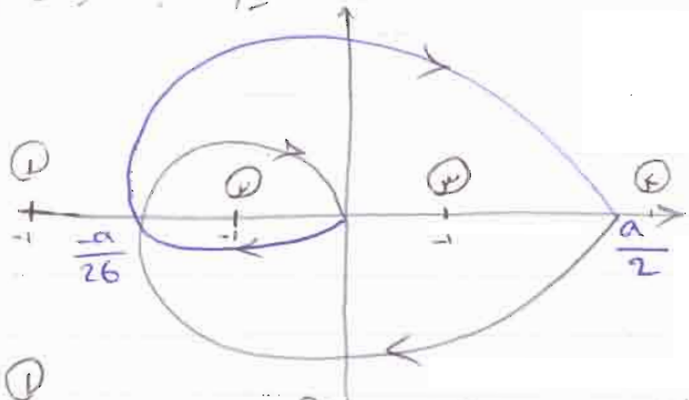
تابع تبدیل حلقه باز



به ازای $a=26$ و $a=-2$ سطرهای صفر داریم.

ولی به ازای بعضی a ها سطر صفر رخ می‌دهد، فقط پایداری یا ناپایداری داریم. حول نایکوئیست ۱- را قطع می‌کند.

چون علامت a را نگفته ۴ حالت برای a خواهیم داشت.



① $\longrightarrow N=0 \xrightarrow{P=0} Z=0 \rightarrow -1<\frac{-a}{26} \rightarrow a<26$ پایدار

② $\longrightarrow N=2 \xrightarrow{P=0} Z=2 \rightarrow -\frac{a}{26}<-1 \rightarrow a>26$ ناپایدار

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(س) $\rightarrow N=1 \xrightarrow{P=0} Z=1 \rightarrow \frac{a}{2}<-1 \rightarrow a<-2$

یک قطب ناپایدار حلقه بسته

(۴) $\rightarrow N=0 \xrightarrow{P=0} Z=0 \rightarrow \frac{a}{2}>-1 \rightarrow a>-2$

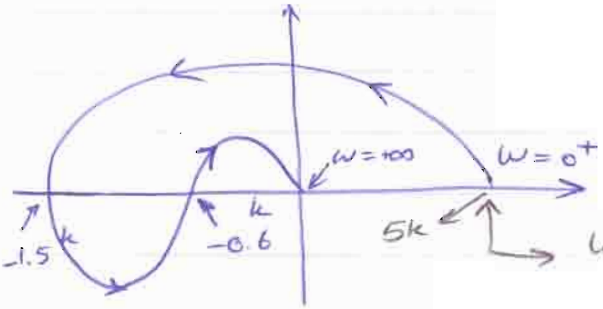
پایدار

(۱),(۲) $\rightarrow \boxed{-2<a<26}$

گزینه ۴ ✓

۲۱۰

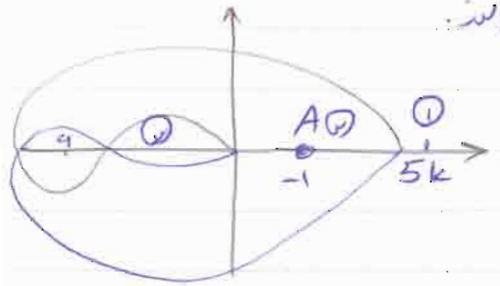
ادامه سوال ۸۸ :



when $s=0 \rightarrow$ start $=5k$

$P=2, Z=1 \rightarrow N=1-2=-1$

باید ناحیه‌ای را پیدا کنیم که شرایط فوق در آن صدق کند.



$-1>5k$ فقط A این شرایط را دارد

$k<\frac{-1}{5} \rightarrow \boxed{k<-0.2}$

گزینه (۲) ✓

(۱) $\rightarrow N=0, P=2, Z=-2$

(۲) $\rightarrow N=-1 \rightarrow Z=...$ جواب

(۳) $\rightarrow N=2$ (۴) $\Rightarrow N=2$

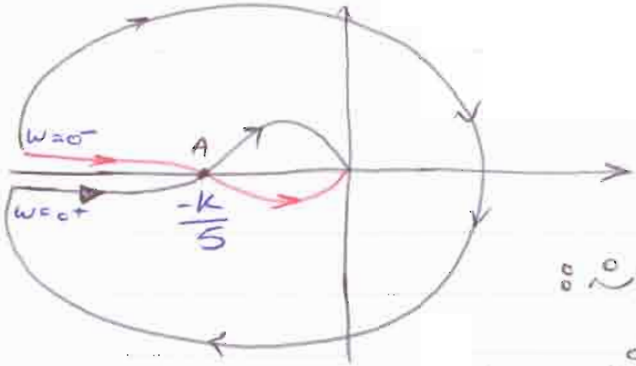
$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}$$

244 : برق 89

type=2
$k>0$

از تمام ریشه‌ها type=2 است.

از روی ریشه‌ها می‌فهمیم $k>0$ است. ← $-\frac{k}{5}=-1 \rightarrow k>0$ $\quad -\frac{k}{2}=-1 \rightarrow k>0$



فاز کمانی -270° ← $4-1=3$

برای حرکت منفی 0^- به 0^+ وصل می‌شود.

باید فقط A را پیدا کنیم اگر نقطه A = −1 باشد:

$$\Delta(s)=s^4+5s^3+6s^2+ks+k$$

s^4	1	6	k
s^3	5	k	
s^2	$\frac{30-k}{5}$	k	
s^1	$x=0$		
s^0	k		

$$x=0 \rightarrow \left(\frac{30-k}{5}\right)k=5k$$

$$\rightarrow k=5$$

$$A=-1=\frac{-k}{5}$$

اگر $k<0$ بود در طرف راست نمودار را قطع می‌کرد.

s^1 سطر صفرات زیرا باید ریشه s^2 را بدست بیاریم. چون مرز پایداری محور $j\omega$ را قطع می‌کنیم یعنی یک قطب مزدوج مختلط. نمودار وقتی نمودار را قطع کرده یعنی سطر صفر داشت یعنی محور $j\omega$ روت لوکاس.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

237

PAPCO

10f

Subject :
Year .   Month .   Date .

hamed_shirinabadi@yahoo.com

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ایراد این سوال این است که b، a و d باید مثبت باشد. در صورت سوال ذکر نشده — 237 / برگ 39

s^4	a	b	k
s^3	c	d	
s^2	10	k	
s^1	$e(10-k)$		
s^0	k		

سطر صفر زمانی رخ می‌دهد که $k=10$ باشد

محل تقاطع یعنی q برای اینکه $=1$ شود باید

$$qk=-1 \xrightarrow{k=10} q=-0.1$$

فرکانس نوسان معادله کمکی است. $\omega = 1\ \frac{rad}{s}$ گزینه ۴

195 / برگ 33 : مبحث معادل $s=0$ صفر زودتر

$$G(s)=\frac{k(s^2+2s+4)}{s(s+10)(s+20)}$$

رخ داده است. این سوال از کتاب دانشگاه تهران اشتباه جواب داده.

چون معیار فرکانس صفر، صفر زودتر رخ داده است پس 2 و 4 حذف شده است

اگر درست بنویسیم به ازای دو k مثبت سطر صفر رخ می‌دهد پس در دو نقطه سمت راست محور حقیقی را قطع می‌کند. گزینه ۳ جواب است.

259 / آزمون عیان 80

$$G(1)=k\,\frac{s^3+s^2+1}{s+0.5}$$

چون سیستم Improper است در $\omega\to\infty$ سیستم قطعاً به سمت بی‌نهایت باید

بود. به ازای $k=1$ و $k=\frac{1}{2}$ سطر صفر رخ داده (گزینه ۱ و ۲)، به ازای $k=\frac{1}{2}$ سطر صفر

PAPCO

Subject:
Year: Month: Date: ( )

رد هر دو گزینه‌ی ۳ و ۴.

در گزینه سه به ازای $\omega = +\infty$ $\left.\begin{matrix} Im \\ \& \\ real \end{matrix}\right\} = -\infty$ در ربع ۲

$$
\begin{array}{l|l}
s^3 + s^2 + 1 & s + 0.5 \\ \hline
-s^3 - 0.5s^2 & s^2 + 0.5s - 0.25s \\
\hline
0.5s^2 + 1 & \\
-0.5s^2 - 0.25s & \\
\hline
-0.25s + 1 & \\
+0.25s - & \\
\hline
\text{عدد} &
\end{array}
$$

$$\rightarrow \frac{s^3+s^2+1}{s+0.5} = s^2 + 0.5s - 0.25s + \frac{\text{عدد}}{s+0.5}$$

$\omega \rightarrow +\infty$

$$\rightarrow G(j\omega) = -\omega^2 + j0.5\omega$$

در گزینه ۴ جواب است در $\omega = +\infty \longrightarrow Im = +\infty$

$re = -\infty$

از مفهوم پایداری نسبی را بوسیله نایکوئیست بهتر می‌فهمیم ۲ اگر سیستم تا چه اندازه پایدار یا

تقریباً پایداره می‌خواهیم اما نایکوئیست جواب دقیق می‌دهد.

PM (حد فاز) phase margin

GM (حد بهره) Gain (margin)

$|G(j\omega_c)| = 1$

ω_c : فرکانس عبور بهره → gain cross over Freq

عددار بود که محور افق را قطع می‌کند = فرکانسی که نایکوئیست

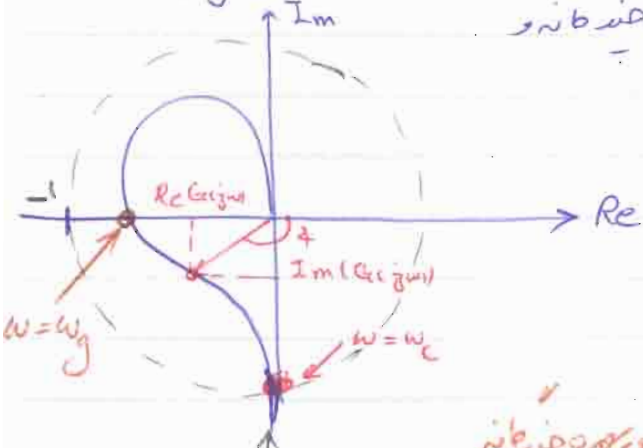
دایره واحد را قطع می‌کند.

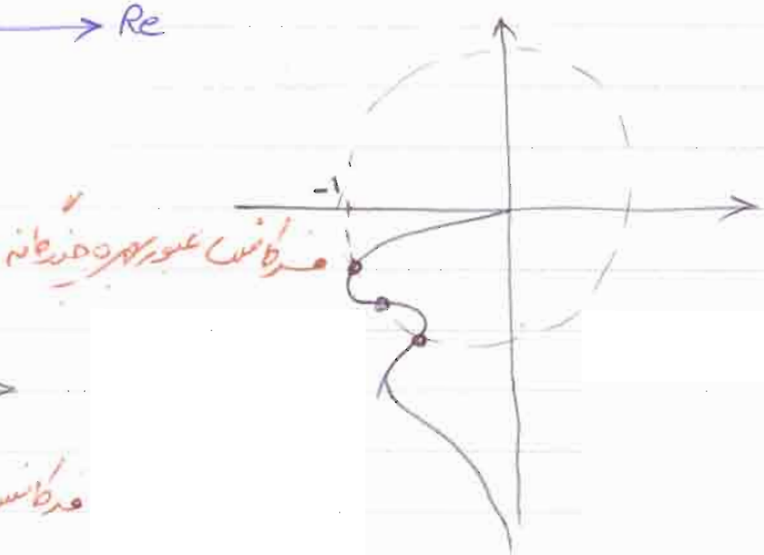
PaPCO

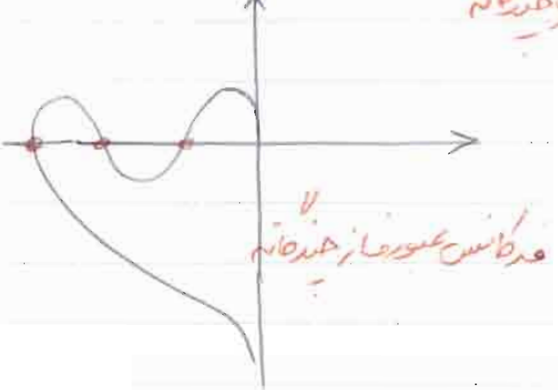
phase cross over freq. فرکانس عبور فاز : ω_g or ω_π

$\angle G(j\omega_g) = -180$

سیستم‌های داریم با فرکانس عبور بهره چندگانه و فرکانس عبور فاز چندگانه ...







تعریف حد فاز و حد بهره:

حد بهره $GM = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = a$

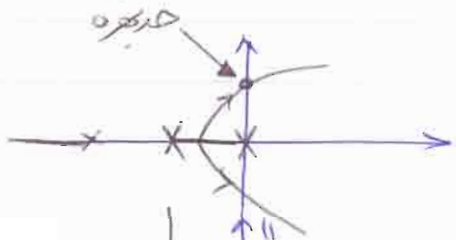
حد بهره معکوس اندازه تابع تبدیل حلقه باز در فرکانسی است که فاز آن -180 است (ω_g)

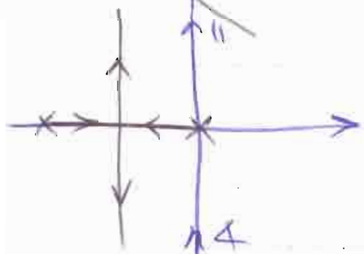
حد فاز $+180^\circ$ علاوه فازی است که در آن اندازه حلقه باز برابر ۱ است.

حد فاز $PM = +180^\circ + \angle G(j\omega_c)$

گین حلقه باز را حداکثر چقدر زیاد کنیم تا سیستم پایدار بماند یعنی حد بهره. پس حد بهره

را با راث حساب می‌کنیم.



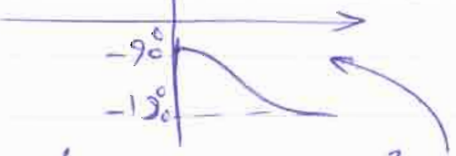


اگر سیستم همیشه مکان‌ها سمت چپ

$GM = \infty$

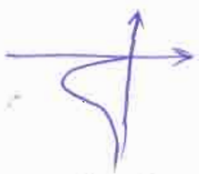
باشد حد بهره ∞ است.

مفهوم حد بهره: برای اینکه حد بهره ∞ شود:



۱) در راث تغییر علامت نداریم

۲) مکان آن سمت چپ است. ۳) نمودار فاز ۱۸۰°- را قطع نمی‌کند.

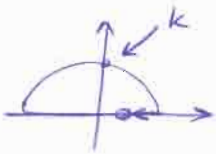


یعنی در ∞ فرکانس حقیقی را قطع می‌کند:

یعنی سیستم می‌نیمم فاز است (صفر و قطب سمت راست نخواهد داشت)

وقتی سیستم ناپایدار است نمی‌توانیم حد بهره و فاز تعریف کنیم، پس این را برای سیستم‌ها (۲، ۳)

می‌نیمم فاز می‌نویسیم.



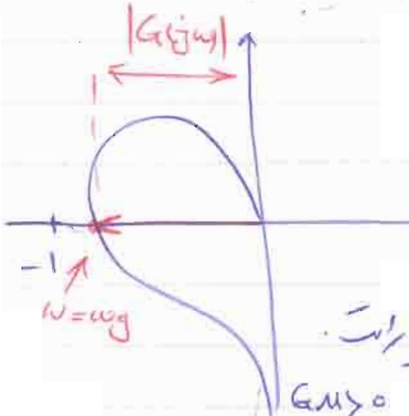
اگر فقط صفر داشته باشیم می‌توانیم تعریف کنیم.

این داستان‌هایی که گفتیم برای $k>0$ است. فعلاً برای $k<0$ چیزی اثبات نشده است.

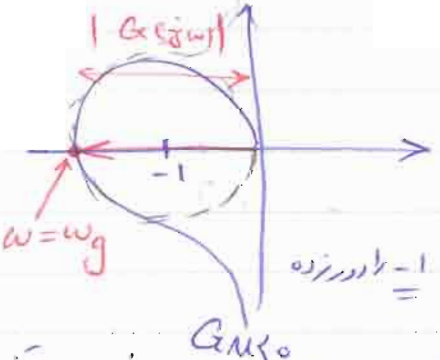
حد بهره با توجه به تعریف $GM = \frac{1}{|G(j\omega)|}$ اگر منفی باشد یعنی برحسب dB تعریف شده است.

چون اگر کسر بین ۱ و ۰ باشد log آن منفی می‌شود: $GM = -2\,db$

اگر بزرگتر از ۱ باشد log آن مثبت می‌شود. پس حد بهره اگر برحسب db باشد می‌تواند منفی هم تعریف شود.



وقتی اندازه بین ۱ و ۰ است یعنی حد بهره مثبت است. وقتی ۱- را دور نزده یعنی سیستم پایدار است.

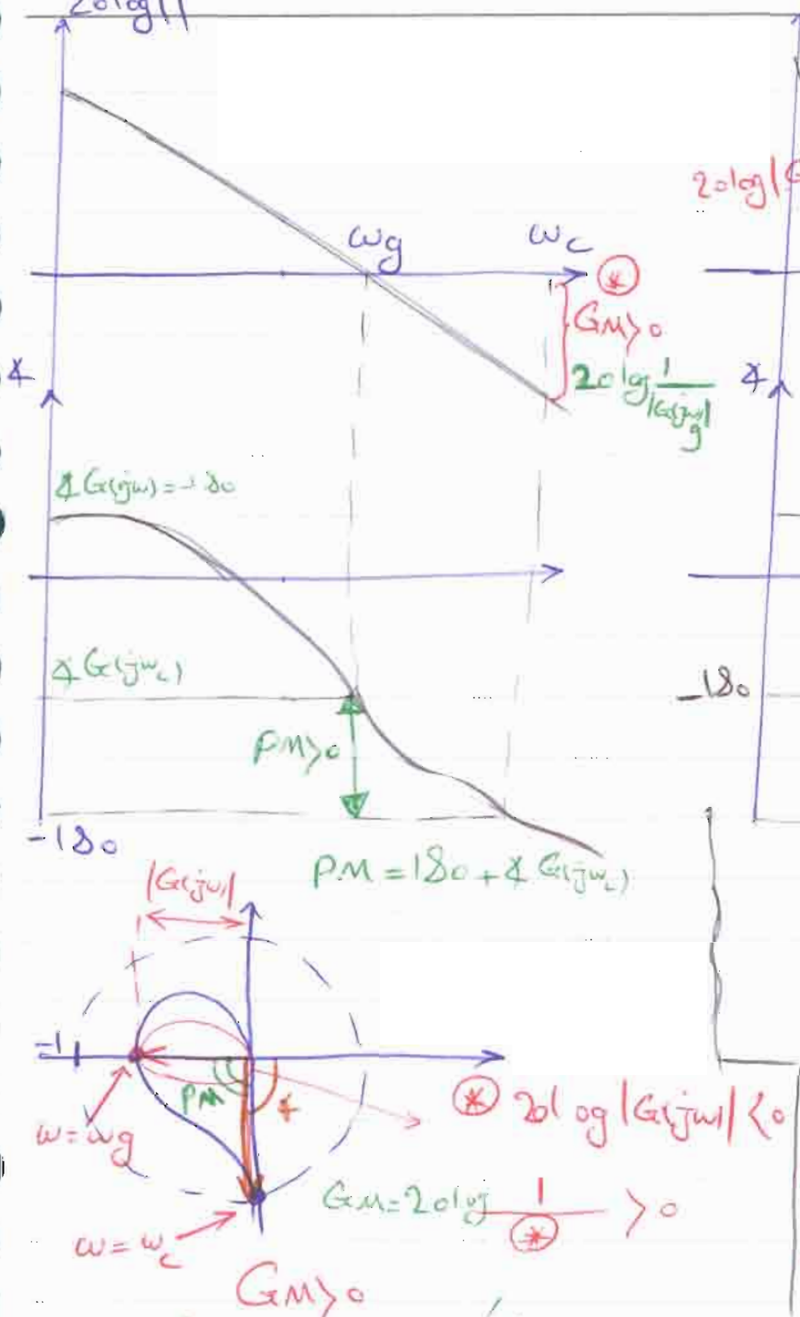


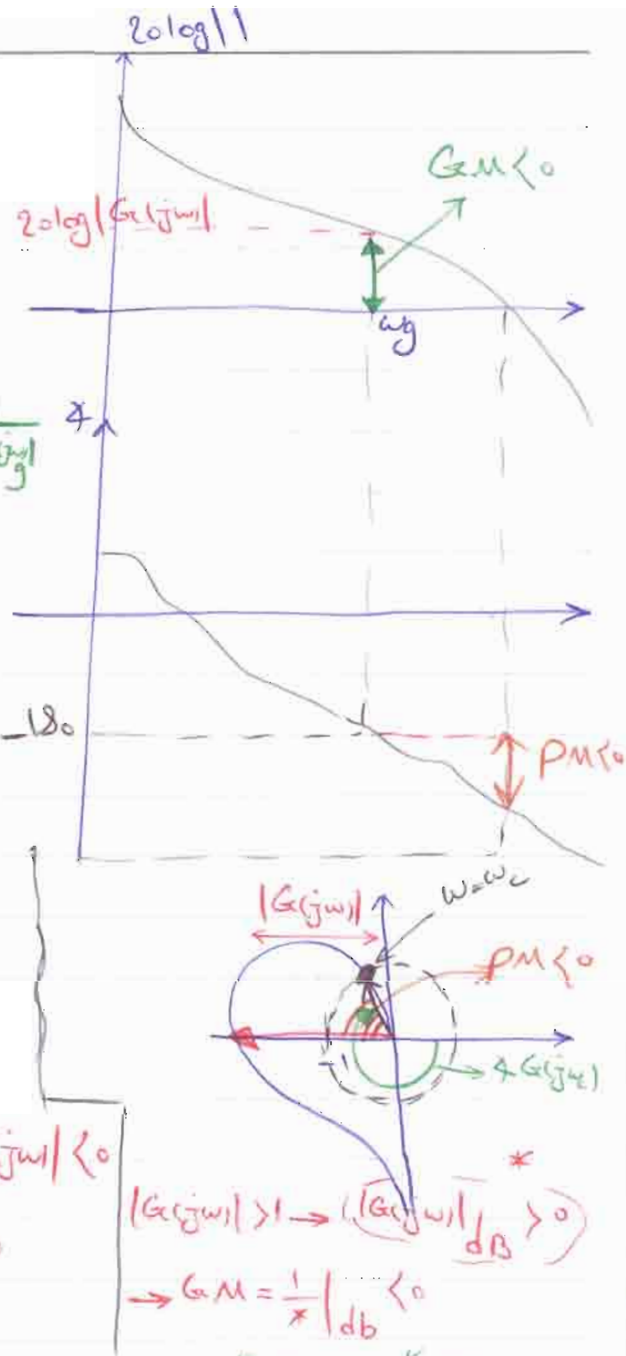
چون اندازه بزرگتر از ۱ است پس حد بهره کوچکتر از ۱ است پس برحسب dB عدد منفی می‌شود. چون ۱- را دور زده ناپایدار است و می‌توان در شکل هم ترسیم شود دو بار ۱- را دور می‌زند یعنی دو بار تغییر علامت در راث داریم.

همین موضوع را در نمودار بود هم بررسی می‌کنیم

Subject:

Year: Month: Date:





PM زاویه‌ای است که دایره واحد قطع می‌شود.

زاویه بین نایکوییست با محور حقیقی سمت چپ ← PM

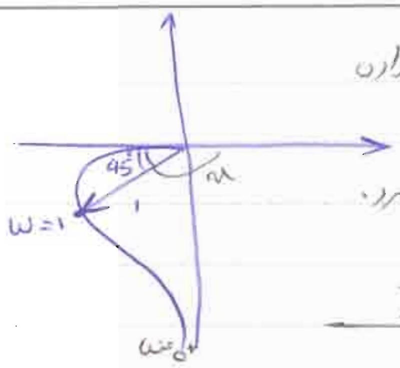
$\angle G(j\omega_c)$ تقریباً 270- است با 180 جمع شده دیگر عدد منفی است ← PM<0

چقدر فاز منفی به سیستم اضافه کنیم تا سیستم پایدار بماند.

PaPCO

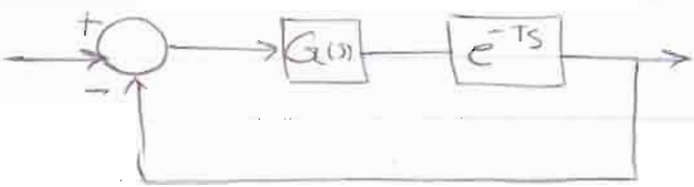
جلسه چهاردهم

283 : اتوماسیون ۹۰



وتر = ۱ است پس در دایره واحد قطع کرده که داریم

پیداست ← $\omega=1$ ، تأخیر اندازه را هم عوض نمی‌کند.



$$\measuredangle = \measuredangle G(j\omega) - T\omega$$

$$\measuredangle G(j1) = \underbrace{-\frac{3\pi}{4}}_{45-180} - T \longrightarrow PM = \frac{\pi}{4} - T > 0$$

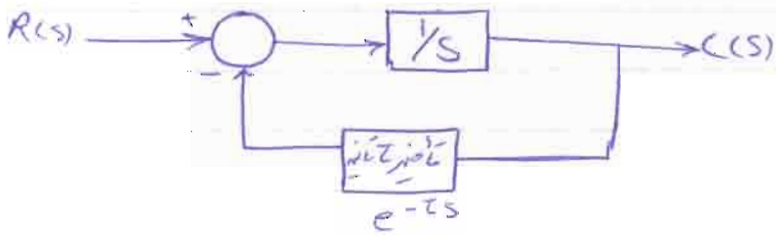
$$T < \frac{\pi}{4} \longrightarrow 0.78\,\text{sec}$$

$$PM = 180 + \measuredangle \alpha \rightsquigarrow \measuredangle \alpha = G(j1)$$

$$45 = 180 + \measuredangle G(j1) \rightarrow G(j1) = -135 = \boxed{-\frac{3\pi}{4}}$$

جلسه چهاردهم

: 87 برق 126



$$e^{-\tau s} \simeq \frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}$$

حل تقریبی

معیار R-H

Subject:
Year: Month: Date:

تحلیل پایداری سیستم‌های LTI و تأخیردار مینیمم فاز:

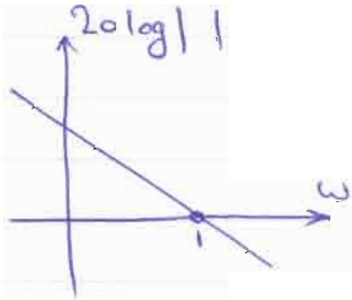
$\boxed{PM>0}$ در بلوک Delay دیدید و اساسش مثبت بودن $\underline{PM}$ است.

$$G(s)=\frac{e^{-\tau s}}{s} \longrightarrow G(j\omega)=\frac{e^{-\tau j\omega}}{j\omega}$$ روال حل:

$$|G(j\omega_c)|=1 \longrightarrow \omega_c=\ldots \qquad \measuredangle G(j\omega)=-\tau\omega-\frac{\pi}{2}$$

$$\measuredangle G(j\omega)=\ldots$$

$$PM=\pi+\measuredangle G(j\omega_c)>0$$



$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\omega}=1 \longrightarrow \omega_c=1\ \frac{rad}{sce}$$

$$\measuredangle G(j\omega_c)=-\tau-\frac{\pi}{2}$$

وقتی تأخیر هست سیستم بی‌نهایت صفر و قطب دارد.

$$PM=\pi+\left(-\tau-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\tau>0$$ infinite dimensional

$$\longrightarrow \tau<\frac{\pi}{2} \longrightarrow \tau<1.57\,sec$$

$\tau=0$ باشد تأخیر نداریم:

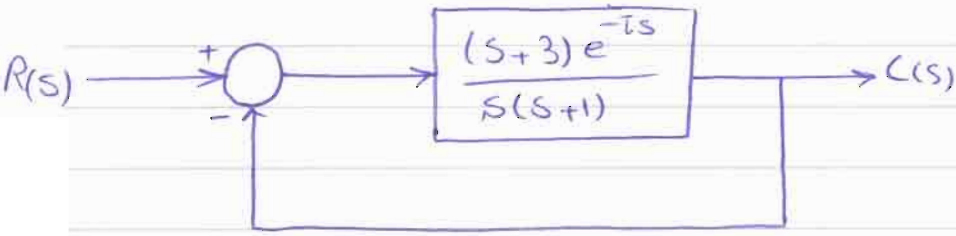
در $\tau=1.57^{sec}$: درست لحظه‌ای ω را قطع می‌کند در $t>1.57$ ناپایداری دارد سمت راست.

$$\dot{x}=A_{\infty\times\infty}\,x$$

تأخیر یعنی اینکه (در همان لحظه) سنسور خروجی را اندازه‌گیری نمی‌کند، τ ثانیه طول می‌کشد.

SUBJECT:

Year: Month: Date:



۸۱ - برق 86:

$$G(s)=\frac{(S+3)e^{-\tau s}}{S(S+1)} \longrightarrow G(j\omega)=\frac{(j\omega+3)e^{-\tau j\omega}}{j\omega(j\omega+1)}$$

$$|G(j\omega_c)|=\frac{\sqrt{\omega^2+9}\ (1)}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}=1 \longrightarrow \omega^2+9=\omega^2(\omega^2+1)$$

$$\longrightarrow 9=\omega^4 \longrightarrow \omega^2=3$$

$$\longrightarrow \boxed{\omega_c=\sqrt{3}}$$

$$\measuredangle G(j\omega_c)=-\tau\omega+tg^{-1}\frac{\omega}{3}-\frac{\pi}{2}-tg^{-1}\omega$$

$$=-\sqrt{3}\,\tau+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$$

$$PM=\pi+\measuredangle G(j\omega_c)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\,\tau>0 \longrightarrow \boxed{\tau<\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

سؤال 83 و 284 یکی هستند - نگاه کنید

83 - برق 86: تابع تبدیل حلقه باز چند برابر شود، بهره را چقدر زیاد کنیم تا ناپایدار شود؟

$$G(s)=\frac{1\times a}{(S+1)^3} \qquad PM=? \qquad G_M=?=8$$

$$20\log 8=20\log 2^3=60\overbrace{\log 2}^{0.3}=\boxed{18}$$

SUBJECT:

Year: Month: Date:

$$\Delta(s) = (s+1)^3 + a = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + a$$

s^3	1	3	
s^2	3	$1+a$	$\rightarrow$ ریشه این نقطه ω است
s^1	$9-1-a=0$	$\longrightarrow a=8$	$\boxed{a>?}$
s^0	$1+a$		

اگر اندازه را ۱ (یک) بگذارید هیچ ω ای بدست نیاید

یعنی $PM = 180^\circ$ و به ازای همه a ها پایدار است.

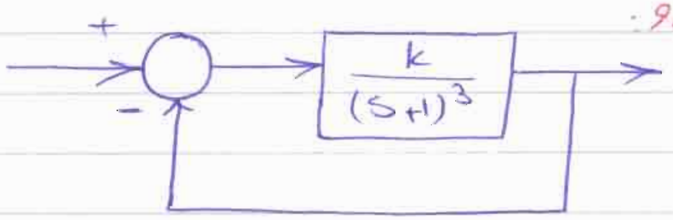
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\left(\sqrt{\omega^2+1}\right)^3} = 1 \longrightarrow \boxed{\omega = 0}$$

$$\measuredangle G(j\omega) = 0 - 3\tan^{-1}\omega \Big|_{\omega=0} = 0$$

$$PM = \pi$$

سوال 283: حل شده

سوال 284 _ اتوماسیون ۹۰



$$PM = \pi + \measuredangle G(j\omega_c) = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \measuredangle G(j\omega_c) = \frac{-3\pi}{4}$$

$PM = 45^\circ$ است، $k > 0$

$$\measuredangle G(j\omega_c) = 0 - 3\tan^{-1}\omega_c = \frac{-3\pi}{4} \longrightarrow \boxed{\omega_c = 1}$$

$k = ?$

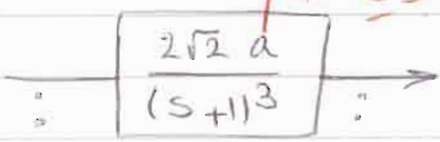
TAT

$G_M = ?$

SUBJECT:

Year: Month: Date:

$$|G(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{k}{\left(\sqrt{\omega_c^2+1}\right)^3} = 1 \rightarrow \boxed{k = 2\sqrt{2}}$$



k را بدست آوردیم، ولی a مجهول است
می‌داریم

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 2\sqrt{2}\,a$$

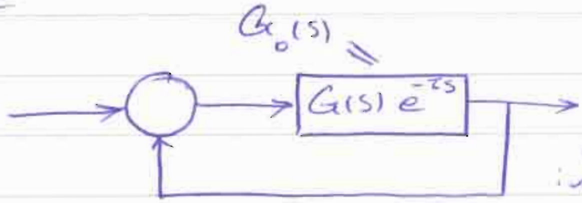
توالی‌ها؟

	1	3
	3	$1+2\sqrt{2}\,a$
	$9-1-2\sqrt{2}\,a = 0 \rightarrow a = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{2}}$	

اگر اندازه را ۱ گذاشتیم چند بار به دست آمد چکار کنیم؟ یعنی در نایکوییست دایره واحد

چند بار قطع می‌شود ، یعنی سیستم با فرکانس گذر عبور چندگانه می‌شود

سوال 242 :



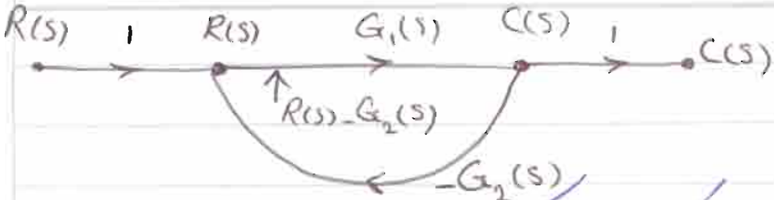
حداکثر Delay چقدر باشد تا پایدار باشد:

وقتی Delay دارد اندازه‌ها ۱ است. از روی جدول درجه‌ها که اندازه یک شده؟

از روی جدول

$$\begin{cases} \omega_{c_1} = 1 \rightarrow |G(j\omega_{c_1})| = 1 \rightarrow \measuredangle G(j\omega_{c_1}) = -110^\circ \\ \omega_{c_2} = 2 \rightarrow |G(j\omega_{c_2})| = 1 \rightarrow \measuredangle G(j\omega_{c_2}) = -130^\circ \\ \omega_{c_3} = 3 \rightarrow |G(j\omega_{c_3})| = 1 \rightarrow \measuredangle G(j\omega_{c_3}) = -150^\circ \end{cases}$$

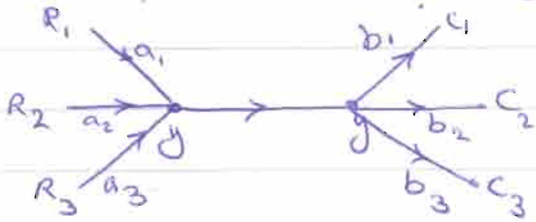
TAT



اتصال ترتیبی:

مدترکیب های موازی و تبدیل اتصال ترتیبی می‌گویند.

جبر SFG: ۱) مقدار سیگنال هر گره برابر است با مجموعه شاخه‌های ورودی به آن گره.

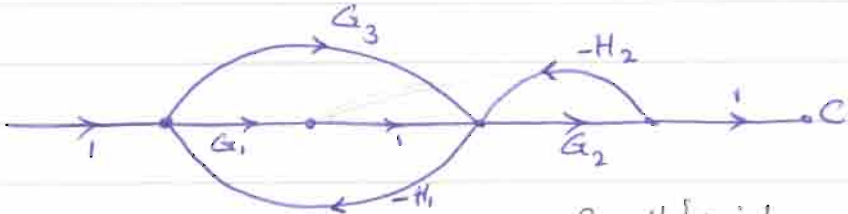


$$y = a_1R_1 + a_2R_2 + a_3R_3$$

2) مقدار سیگنال هر گره در تمام شاخه‌های که از آن گره خارج می‌شود پخش می‌شود.

$$C_1 = b_1 y \qquad C_2 = b_2 y \qquad C_3 = b_3 y$$

سؤال ۲۸۵:



n: تعداد مسیر پیش رو: در این سؤال $n = 2$

P_i: حاصلضرب بهره مسیر پیش رو iام

$$P_1 = G_1 G_2$$

$$P_2 = G_3 G_2$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i}{\Delta}$$

Masone Rule

فرمول میسون

$\Delta(s)$: ۱. معادله مشخصه حلقه بسته (characteristic Eq.)

2 - کوفاکتور cofactor

3 - دترمینان ماتریس گراف

همین ست حل مسیر را type بخواهید

$$\measuredangle G_0(j\omega) = \measuredangle G(j\omega) - \tau\omega$$

شرط پایداری این است که همه مثبت باشند

$$\begin{cases} \measuredangle G_0(j1) = -110 - \tau \longrightarrow P.M_1 = 70^\circ - \tau > 0 & (1) \\ \measuredangle G_0(j2) = -130^\circ - 2\tau \longrightarrow P.M_2 = 50^\circ - \tau > 0 & (2) \\ \measuredangle G_0(j3) = -150^\circ - 3\tau \longrightarrow P.M_3 = 30 - 3\tau > 0 & (3) \end{cases}$$

باید پایدار باشد

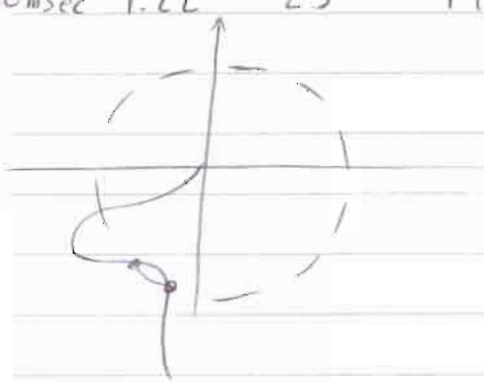
$$(1) \longrightarrow \tau < 70^\circ = \frac{7}{18}\pi \longrightarrow \tau < 1.22\ \text{sec}$$

$$(2) \longrightarrow \tau < 25^\circ = \frac{25}{180}\pi \longrightarrow \tau < 0.483\ \text{sec}$$

$$(3) \longrightarrow \tau < 10^\circ = \frac{1}{18}\pi \longrightarrow \tau < 0.172\ \text{sec}$$

پس بعد از این تمام ناپایدار می‌شود، از این بیشتر نمی‌توان به سیستم تاخیر داد.

436msec 1.22 25 172ms آخر همین است. τ_{max}

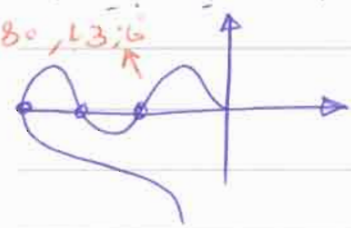


SUBJECT:

Year | Month | Date |

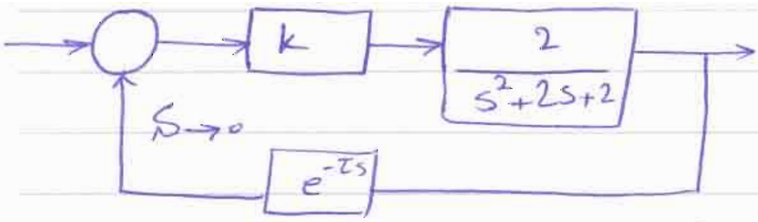
نوع دوم: ممکن است در سه تا فرکانس فاز -180° شود، گین مارجین را خواهد

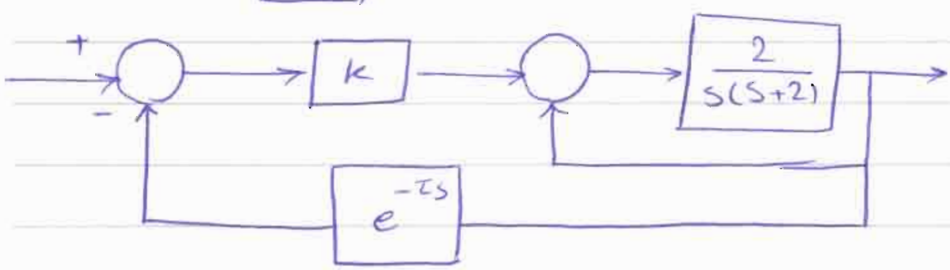
فاز 3 بار 180 شده



تک به تک گین مارجین ها را حساب می‌کنیم، اشتراک ...

سؤال 275 ـ برق 90:





$$e_{ss}\Big|_{u(t)}=\frac{2}{3} \qquad \tau=?$$

$\hookrightarrow$ این را داده k پیدا شود

$$K_p=\lim_{s\to 0} G(s)=k$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+k}=\frac{2}{3}\Rightarrow \boxed{k=\tfrac{1}{2}}$$ در کل خطا داریم s=0 را بگذاریم

$$G(s)H(s)=\frac{e^{-\tau s}}{s^2+2s+2}\ \underset{s=j\omega}{=}\ \frac{e^{-\tau j\omega}}{2-\omega^2+j2\omega}$$

$$\to \left|G(j\omega_c)\right|=\frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}}=1\to\frac{1}{\sqrt{4+\omega^4}}=1$$

ما نداریم، پس به ازای تمام مقادیر τ سیستم حلقه بسته پایدار است.

SUBJECT:

Year: Month: Date:

۹۵- برق ۸۹ :

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+10)}$$

$$e_{ss}\Big|_{t\,u(t)}=\frac{1}{k_v}=\frac{10}{k}=0.1$$ کافی است k را پیدا کنیم

اگر $GM=1.1$ یعنی ۱.۱ برابر k گذاشتیم سیستم سطر صفر می‌دهد.

$$\Delta(s)=s^3+11s^2+10s+1.1k$$

$$\begin{array}{l|ll} & 1 & 10 \\ & 11 & 1.1k \\ & 110-1.1k=0 & \rightarrow \boxed{k=100} \end{array}$$

$$e_{ss}\Big|_{(t+\cancel{1})u(t)}=?$$

← سیستم $\underline{type=1}$ است.

روش دیگر محاسبه GM (با استفاده از تعریف):

$$GM=\frac{1}{|G(j\omega_g)|}=1.1\rightarrow |G(j\omega_g)|=\frac{10}{11}=\frac{k}{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+1}\sqrt{\omega_g^2+100}}$$

$\omega_g=\sqrt{10}$ * ⟵ در صفحه بعد بدست آمده

$$=\frac{k}{\sqrt{10}\sqrt{11}\sqrt{110}}=\frac{10}{11}\rightarrow \boxed{k=100}$$

$$\measuredangle G(j\omega_g)=-\pi\rightarrow 0-\frac{\pi}{2}-tg^{-1}\omega_g-tg^{-1}\frac{\omega_g}{10}=-\pi$$

$$\rightarrow tg\left(tg^{-1}\omega_g+tg^{-1}\frac{\omega_g}{10}\right)=tg\frac{\pi}{2}$$

TAT

SUBJECT:
Year | Month | Date

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\, tg\beta} \quad , tg(tg^{-1}\alpha) = \alpha$$

$$\frac{\omega_g + \omega_g/10}{1 - \frac{\omega_g^2}{10}} = \infty \longrightarrow \boxed{\omega_g = \sqrt{10}} \quad *$$

، 87 برق - 127

$$G(s) = \frac{ka}{(s+2)^2(s+3)}$$

k را چنان بیابید که $k_p>2$ و $G_M>3$ شود ← می‌توانستید بنویسید:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} < 1/3$$

type هم برابر صفر است وقتی type=0 باشد $k_v=0$ است.

$$k_p = G(0) = \frac{k}{12} \longrightarrow \frac{k}{12} > 2 \longrightarrow k > 24 \quad (1)$$

گفته $G_M>3$ کاری نداریم، a را پیدا می‌کنیم، a برحسب k را بدست می‌آید حد k را می‌دانیم.

$$\Delta(s) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12 + ka$$

$$\begin{array}{l|ll} & 1 & 16 \\ & 7 & 12+ak \\ & 100-ak=0 & \longrightarrow a = \frac{100}{k} > 3 \rightarrow k < \frac{100}{3} \quad (2) \end{array}$$

$$(1),(2) \longrightarrow 24 < k < \frac{100}{3}$$

TAT

SUBJECT:

Year | Month | Date |

$G(s) = \frac{a(s+2)}{(s+1)(3s+1)}$ فرض کنید a مثبت است: 88 الکترونیک ـ 207

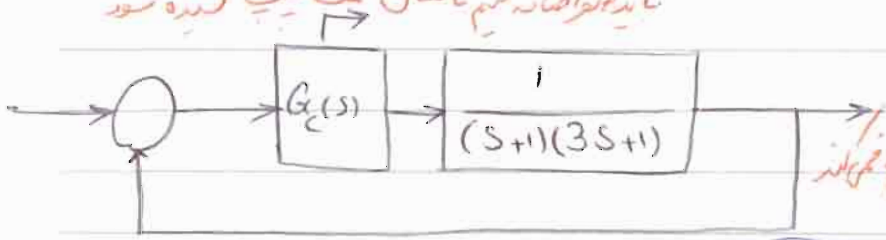
$GM = ?$ همیشه می‌توانید gain را تا بی‌نهایت زیاد کنیم.

معمولی: تمام ضرایب وقتی که a مثبت است، مثبت اند، پس سطر صفر هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد و $a=\infty$ است.

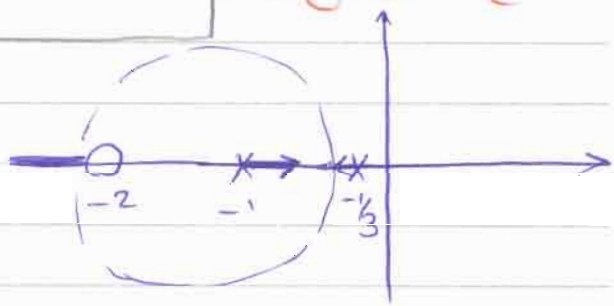
$\Delta(s) = 3s^2 + (4+a)s + 1 + 2a$

باید صفر اضافه کنیم تا قطب‌ها سمت چپ کشیده شود

روش روت لوکاس:



هیچ‌گاه محور را قطع نمی‌کند



معرفی انواع کنترل کننده‌ها:

۱) تناسبی: proportional k_p

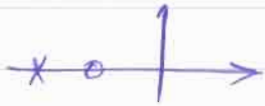
۲) تناسبی مشتقی (PD): $k_p + k_d s$

۳) تناسبی انتگرالی (PI): $k_p + \frac{k_I}{s}$

۴) تناسبی مشتقی انتگرالی (PID): $k_p + \frac{k_I}{s} + k_d s$

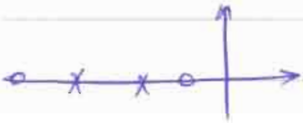
SUBJECT:
Year: Month: Date:

۵) پیش‌فاز lead :



۶) پس‌فاز lag :

۷) lead_lag پیش‌فاز_پس‌فاز :



هرچه مکان (قطب‌های حلقه بسته) بیاید سمت چپ نوسان زیاد می‌شود overshoot زیاد می‌شود. هروقت شما خواستید overshoot را زیاد کنید باید پیست را کم کنید یا t_s را کم کنید، به نظر می‌آید که باید اول قطب اضافه کنند مثل شماره ۴.

PI یک حالت خاص از lag است.

PD یک حالت خاص از lead است که آن قطب در ∞ است.

اگر بخواهید خطا را کم کنید باید بیشتر type عوض شود یا نه

اگر بخواهید خطا کم شود باید یک صفر کنیم تا k_p زیاد شود ولی اگر خواستید خطا به صفر شود باید یک I در کنترلر باشد.

$$G(s)=\frac{1}{s+4} \longrightarrow k_p = 1/4$$

$$e_{ss}=\frac{4}{5}=\frac{1}{1+1/4}$$

هستیم می‌خواهیم overshoot کم باشد و قطب‌ها بروند سمت چپ.

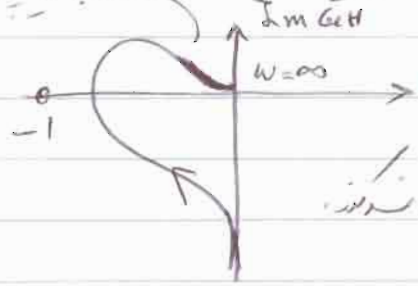
پس باید PD بگذاریم تا صفر بتواند قطب را به سمت خودش بکشد.

در حالت کنترلر باید منجر به پایداری شود.

278 - برق 90: $\dfrac{k}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$ با افزودن چه نوع جبرانسازی نمودار

نایکوئیست به شکل زیر خواهد بود؟ این سوال نایکوئیست است.

توجه کنید به زیر کشیده



سیستم نوع یک است. نایکوئیست هم نوع یک است. پس کنترلر نباید type اضافه کند.

P ✗

PI ✗

۱- را دور نزده پس PD ای

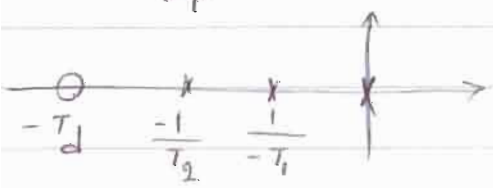
جواب است که پایداری را احداث کند

درجه اختلاف صورت و مخرج 3 است بازای 270- است ولی با 180- آمده

در حالت دو تا قطب اضافه داریم دیگر صفر فقط باید در صورت باشد.

یک راه این است که بگذاریم راست نزنند. $(1+\frac{k_d}{k_p}s) = (1+T_d s)$

یک راه هم root lucas است،

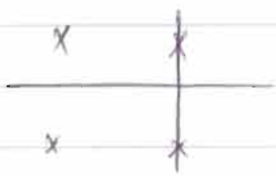


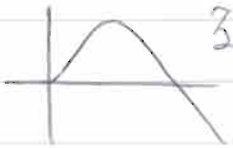
$-\frac{1}{T_d} < -\frac{1}{T_2}$ ، $\frac{1}{T_d} > \frac{1}{T_2} \rightarrow \boxed{T_d < T_2}$

$-\frac{1}{T_d} < -\frac{1}{T_1} \rightarrow \boxed{T_d < T_1}$

SUBJECT:
Year Month Date

سیستم مرتبه دوی میرای ضعیف با قطب مختلط نایکوئیست ها روی خودشان حرکت

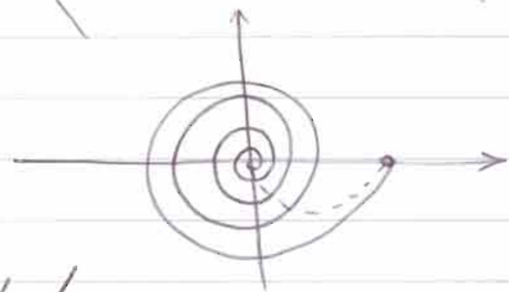




$\xi < 0.5$

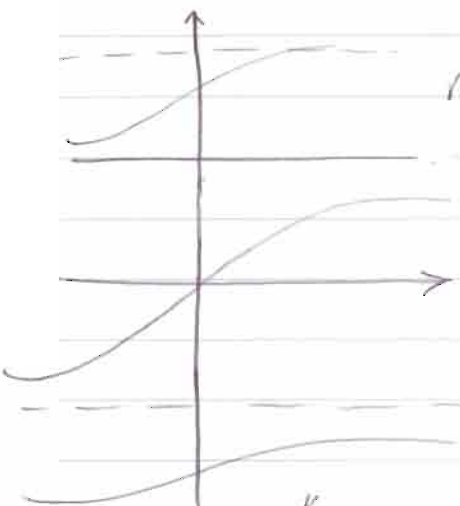
می‌کنند و برمی‌گردند ...

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$



root lucas ، ۱۰۰ بار ساین را قطع می‌کند که نقاط تقاطع روی محور افقی معادل ها

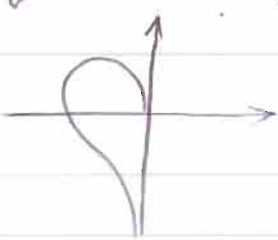
نقاط تقاطع ساین هستند در Nyquist



root lucas

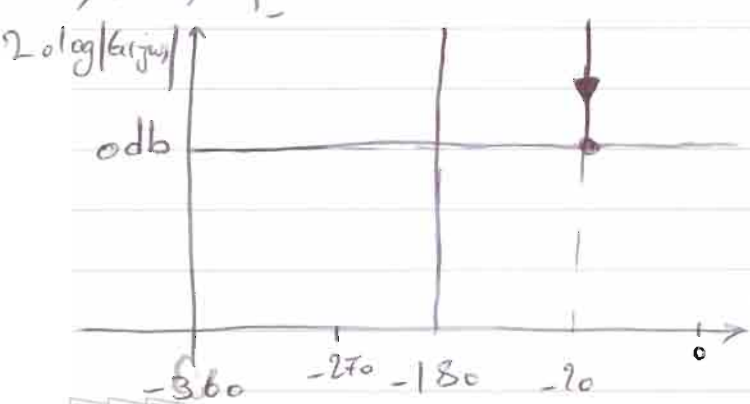
واضح است که type=1 است

چون در 0^+ از ۹۰- رفته به ← اصلی



← ۲۷۰- رسید

لگاریتم اندازه - فاز



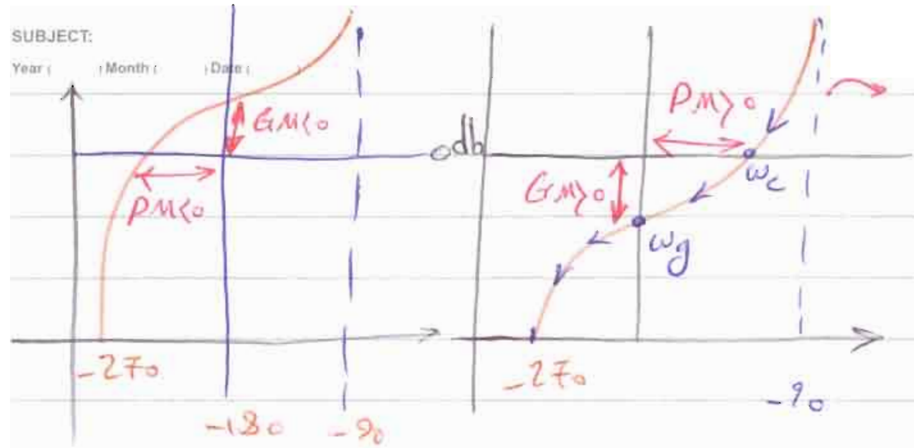
$$G(s) = 1/s$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

همان که ساین اش حذف شده

TAT

SUBJECT:
Year : Month : Date :



type = ? است چون فاز از -90 شروع شده پس ناپیوستی هم از همانجا.

$\frac{1}{?}$

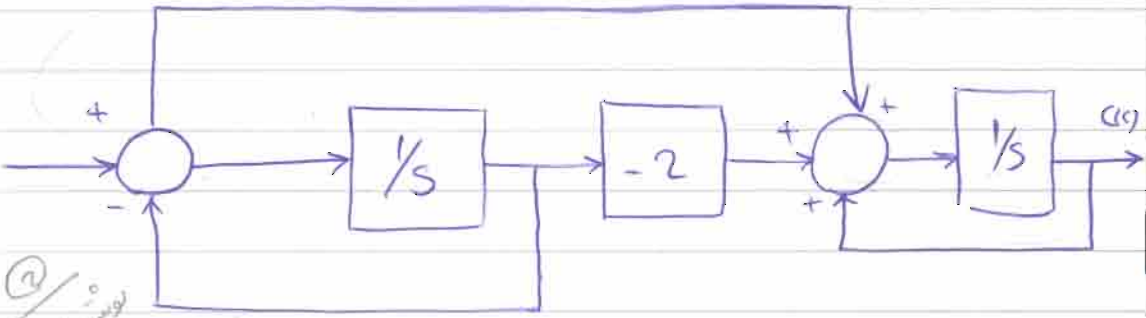
تمرین بی ساچیه

Year Month Date ( )

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2 + G_1G_3}{1 + (-G_1G_2H_1 - G_2H_2 - G_1G_3H_2G_2H_1)}$$

$$D(s) = 1 + G_1G_2H_1 + G_2H_2 - G_1G_2G_3H_1H_2$$

تست 233 - سراسری 89 :

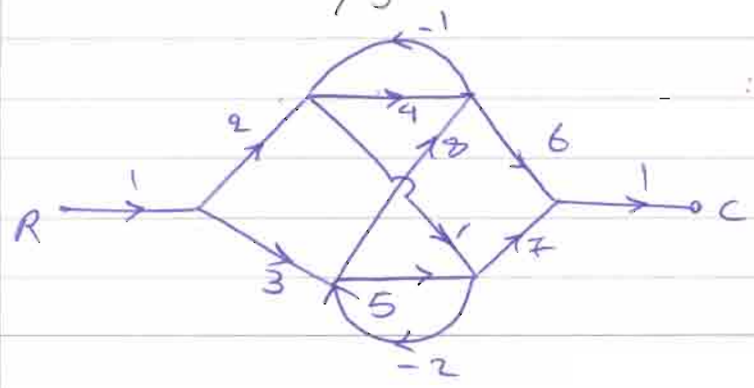


2

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{-2}{s^2}\times 1 + \frac{1}{s}\left(1 + \frac{1}{s}\right)}{1 - \left(\frac{-1}{s} + \frac{1}{s}\right) + \left(-\frac{1}{s^2}\right)} = \frac{-\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}}{1 - \frac{1}{s^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}}{1 - \frac{1}{s^2}} = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$$

سوال 79 - آزاد 86 :



Year: Month: Date: ( )

سری تیلور: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$

$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

مثال) توابع زیر را حول $x_0=0$ خطی کنید:

$f(x) = x + x^2 \longrightarrow f_{Lin}(x) = x \rightarrow$ تحت خطی تابع

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \qquad f_{lin}(x) = 0 + 1(x-0) = \boxed{x}$

$f(x) = x^3 \longrightarrow f_{Lin}(x) = 0$ تحت خطی تابع

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 0 \qquad f_{Lin}(x) = 0 + f'(0)(x-0) = \boxed{0}$

$f(x) = \sin x \rightsquigarrow f(0) = 0 \ , \ f'(0) = 1 \longrightarrow f_{Lin}(x) = \boxed{x}$

$y_1 = f_1(x_1, x_2) = \dot{x}_1$

$y_2 = f_2(x_1, x_2) = \dot{x}_2$

$$f_{Lin} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

مثال: سیستم زیر را حول مبدأ خطی کنید:

$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_1 x_2$

$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -2x_2 + x_1^2 x_2^3$

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(x_1, x_2) = (0,0)} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ 2x_2^3 x_1 & -2 + x_1^2(3x_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Year. Month. Date. ( )

① بین هر عنصری که بین متغیر عبوری و عرضی ارتباط خطی برقرار کند حال مقاومت است. هرگاه متغیر عبوری توسط ضریبی به متغیر عرضی تبدیل شود به آن ضریب مقاومت گفته می‌شود.

① $v = Ri$

$i = \frac{1}{R} v$

مثال $\underset{\text{عبوری}}{f} = \underset{\text{مقاومت}}{B}\, \underset{\text{عرضی}}{v}$

② اگر رابطه بین متغیر عبوری و عرضی مشتق و انتگرالی باشد ضریب مربوطه نشان عنصر ذخیره کننده است.

② $i = C \frac{dv_c}{dt}$

$v = \frac{1}{C} \int i\, dt$

حال اگر مشتق یک متغیر عرضی × ضریبی = یک متغیر عبوری شود در نتیجه آن متغیر خازن است. یا اگر انتگرال متغیر عبوری یک متغیر عرضی ضربدر ضریب مربوطه عکس خازن است.

مثال $\underset{\text{عبوری}}{f} = \underset{\text{جرم}}{m} \frac{dv}{dt}$ مشتق عرضی

سلف هر زمانی که متغیر عرضی آن برابر ضریبی از متغیر عبوری آن باشد سلف است. و یا زمانی که متغیر عبوری آن برابر ضریبی از انتگرال عرضی آن باشد آن ضریب عکس سلف است.

$v = L \frac{di}{dt}$

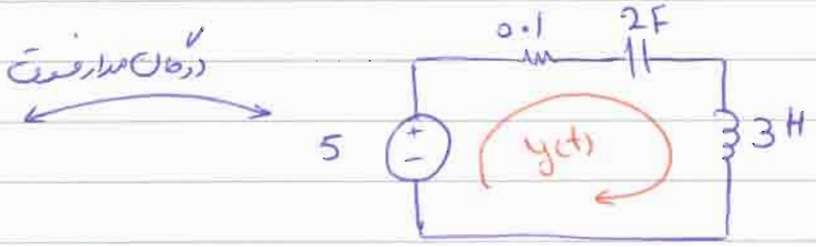
$\rightarrow i = \frac{1}{L} \int v\, dt$

$\rightarrow f = k \int v\, dt$

فنر $k = \frac{1}{L}$

$$-5+\frac{1}{10}y(t)+\frac{1}{2}\int y\,dt+3\frac{dy}{dt}=0 \quad /\,KCL$$

مفهوم دوگان ← سری = موازی Ω ... ...

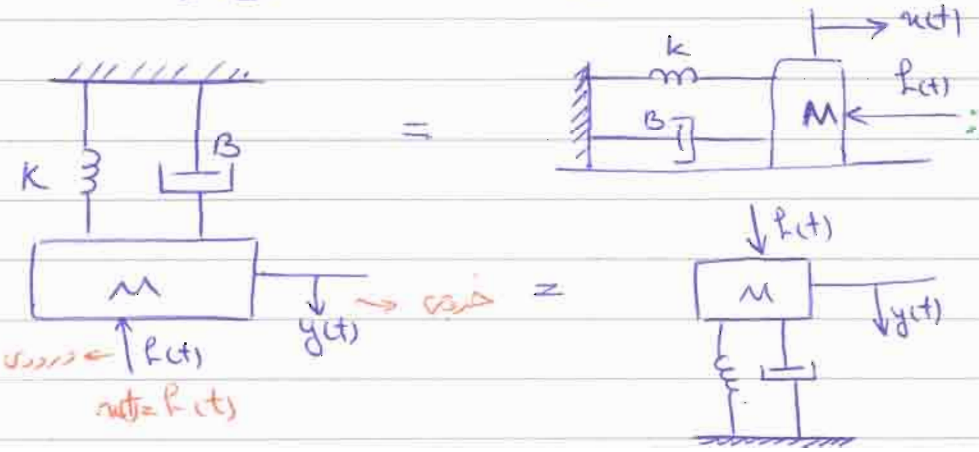


$$\rightarrow KVL:\ -5+0.1y(t)+\frac{1}{2}\int y(t)\,dt+3\frac{dy}{dt}=0$$

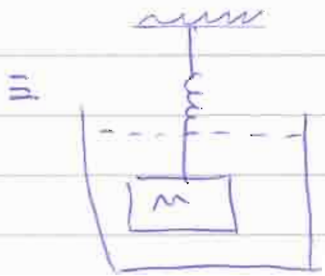
دیدیم با چه روندی مدار کامل دوگان شد معادلات بدست آمده از هر دو مدار کاملا یکی است.

حال همین فرایند را برای سیستم های مکانیکی طولی انجام می دهیم:

قدم اول: تعریف سیستم - ورودی، خروجی:



B ← همان اصطکاک است که به آن ضریب دمپر هم می گویند. این اصطکاک حقیقی است و به تفاوت متراکم گفته می شود که مانع از حرکت جسم M می شود



$$f(t) - k\int v\,dt - Bv = \frac{m\,dv}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{df(t)}{dt} - kv - B\frac{dv}{dt} = m\frac{dv^2}{dt}$$

$$\xrightarrow{L} SF(S) = kV(S) + BSV(S) + MS^2V(S)$$

$$\rightarrow \frac{V(S)}{F(S)} = \frac{S}{MS^2 + BS + k}$$

قبلاً گفتیم : $\dfrac{y(S)}{x(S)} = \dfrac{S}{CS^2 + \frac{1}{R}S + \frac{1}{L}}$

$\Rightarrow M = C,\ B = \frac{1}{R},\ k = \frac{1}{L}$

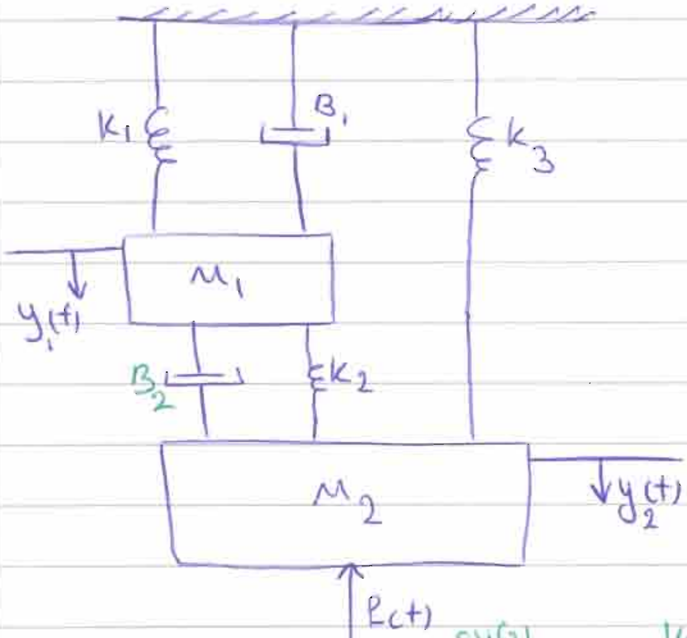
دیدیم که اثبات‌هایی که انجام دادیم درست بود

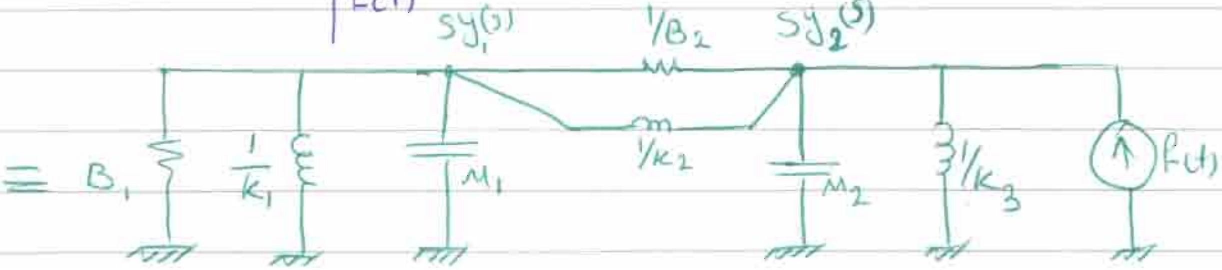
$$V(S) = Sy(S) \rightarrow \frac{y(S)}{F(S)} = \frac{1}{\cancel{S}}\,\frac{\cancel{S}}{MS^2+BS+k} = \frac{1}{MS^2+BS+k}$$

اگر $B=0$ یعنی $2\alpha=0$ می‌شود که همان مدار بی‌اتلاف در دنیای الکتریکال است. درست مانند یک اسیلاتور. یعنی اگر جسمی اصطکاک نداشته باشد. مثل مدار اسیلاتور عمل می‌کند

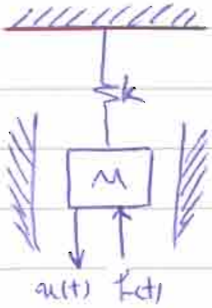
سیستم الکتریکی ①		سیستم الکتریکی ②		سیستم مکانیکی طولی ③	
i	جریان	V	ولتاژ	V	سرعت
V	ولتاژ	i	جریان	F	نیرو
$\frac{1}{R}$		R	مقاومت	$\frac{1}{B}$	اصطکاک
L	سلف	C	خازن	M	جرم
C	خازن	L	سلف	$\frac{1}{k}$	ثابت فنر

مثال:





سوال ۲۴۹ (اتوماسیون ـ ۸۷):



$M = k = 1 \qquad B = 2$

پس از چند ثانیه جابجایی $x(t)$ به max می‌رسد:

$F(t) = \delta(t) \rightarrow F(s) = 1$

$$\rightarrow \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$\rightarrow x(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x(t) = te^{-t}u(t) \xrightarrow[\substack{\text{وقتی max شود} \\ x'(t)=0}]{} e^{-t} - te^{-t} = 0 \rightarrow \boxed{t = 1 \ \text{sec}}$$

ضربه‌ی دیگری بزنیم تا متوقف کند در جا بایستد

Year. Month. Date. ( )

حل به روش اوگاتا:

$$\delta(t) + A\,\delta(t-\tau) - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

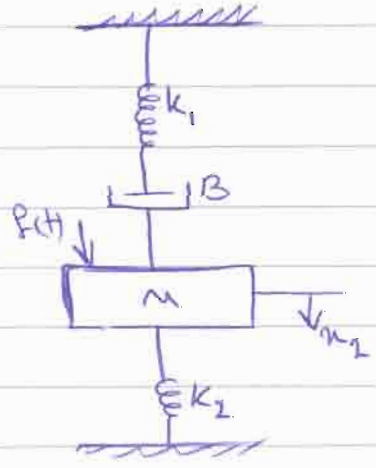
$$\rightarrow 1 + Ae^{-sT} = (Ms^2 + k)\,X(s)$$

$$\rightarrow x(s) = \frac{1+Ae^{-sT}}{Ms^2+k} = \frac{1}{M}\,\frac{1+Ae^{-sT}}{s^2+k/M}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t}_{1} + \underbrace{A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,(t-T)\right)}_{2} = 0$$

باید A و T طوری تعیین شود تا جمع دو ۱و۲ با هم صفر شود.

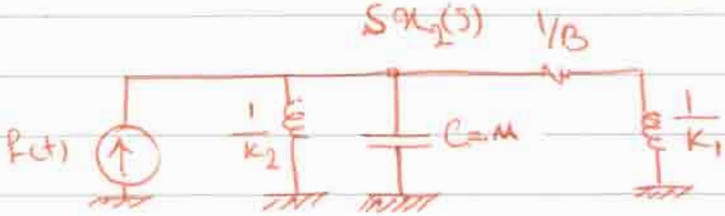
202 (اوگاتا سیف 88):



$$f(t) = \frac{3}{\sqrt{10}}\,e^{-3t}\,u(t)$$

$$B = \frac{\sqrt{10}}{3} \quad k_2 = \frac{2}{\sqrt{10}} \quad k_1 = \sqrt{10}$$

$$M = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

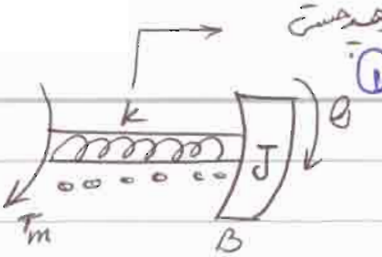


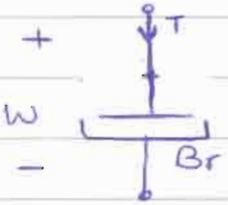
$$\text{KCL}: \frac{s\,x_2(s)}{\frac{1}{k_2}s} + \frac{s\,x_2(s)}{\frac{1}{Ms}} + \frac{s\,x_2(s)}{\frac{1}{B} + \frac{1}{k_1}s} = F(s)$$

$$\rightarrow \left(k_2 + Ms^2 + \frac{s}{\frac{1}{B} + \frac{1}{k_1}s}\right) x_2(s) = F(s)$$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}s^2 + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}s}\right) x_2(s) = \frac{3}{\sqrt{10}}\,\frac{1}{s+3}$$

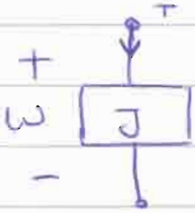
فنر پیچشی ①





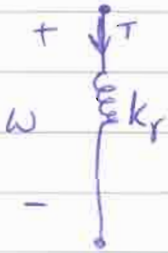
$$T = B\omega$$

$$\omega = \frac{1}{B} T$$



$$T = J \frac{d\omega}{dt}$$

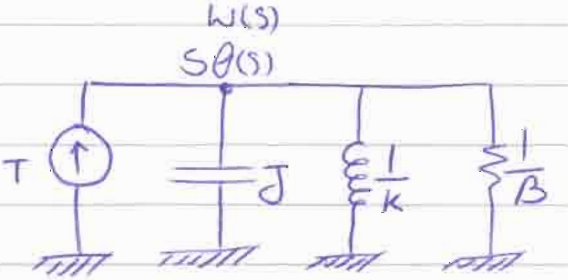
$$\omega = \frac{1}{J} \int T \, d(t)$$

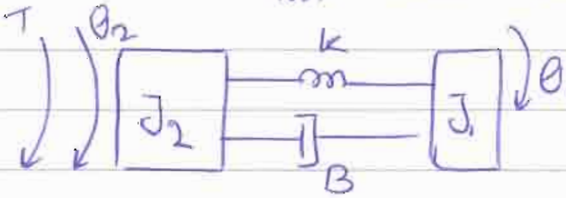


$$T = k_r \int \omega \, dt$$

$$\omega = \frac{1}{k_r} \frac{dT}{dt}$$

معادل الکتریکی ①





سؤال ۱۰ (برگ 83):

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = ?$$

خواص تبدیل لاپلاس:

1) خطی بودن

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

2) شیفت در حوزه زمان

شیفت به چپ در کنترل نداریم:

$$L\{f(t-t_d)u(t-t_d)\} = e^{-st_d} F(s)$$

t_d ← زمان تاخیر delay time

$t_d > 0$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-T_d s} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{T_d s}} = \dfrac{1}{1 + T_d s + \frac{(T_d s)^2}{2!} + \cdots} \\ e^{-T_d s} = 1 - T_d s + \dfrac{(T_d s)^2}{2!} + \dfrac{(T_d s)^2}{3!} + \cdots \quad ① \\ \dfrac{e^{-\frac{T_d s}{2}}}{e^{\frac{T_d s}{2}}} = \dfrac{1 - T_d s/2 + \frac{(T_d s)^2}{8} + \cdots}{1 + \frac{T_d s}{2} + \frac{(T_d s)^2}{8} + \cdots} \quad ② \end{cases}$$

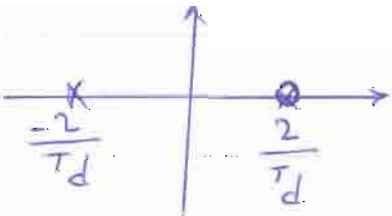
سیستم با قطب‌های محدود و صفرهای نامحدود

تقریب پاده Pade

① سیستم با قطب‌های نامحدود و صفرهای محدود

② سیستم با قطب‌های محدود و صفرهای محدود

$$e^{-T_d s} = \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{1 + \frac{T_d}{2}s}$$

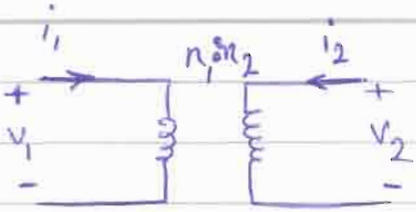


تقریب پاده مرتبه اول:

x: pole
o: zero

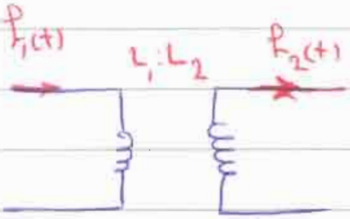
PAPCO

یادآوری ترانس :



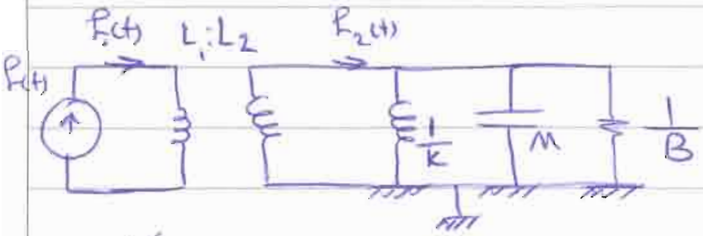
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{i_1}{-i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



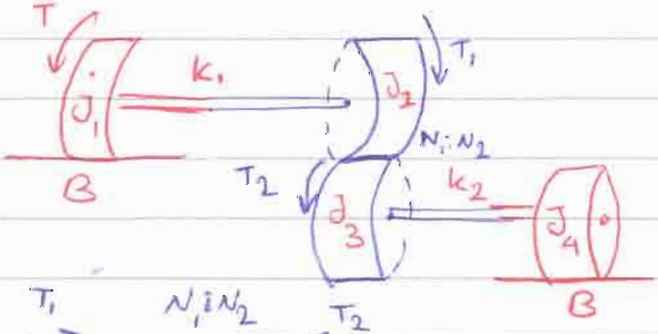
$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{L_2}{L_1}$$

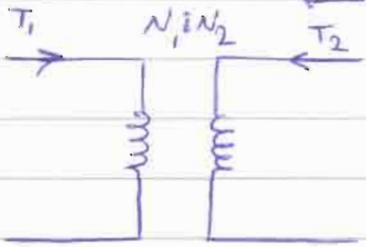
مدل الکتریکی شکل (۱) :



قانون دوم نیوتن : $f_2 - B\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$

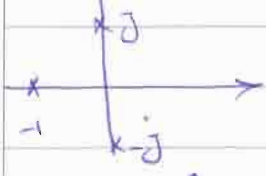
مدل سازی چرخ دنده :



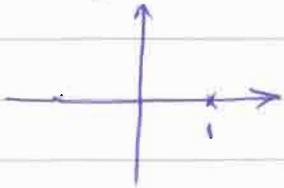


$$T_1 N_1 = T_2 N_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1}$$



$$\rightarrow T(s)=\frac{k}{(s+1)(s^2+1)}$$



$$T(s)=\frac{k}{s-1}$$

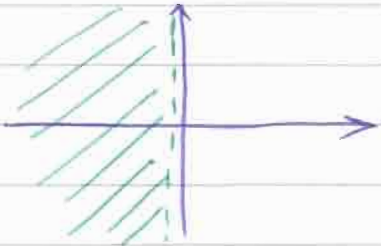
نکات:

این نوع سیستم ورودی محدود یعنی قطب‌های آن همه سمت چپ باشند یا اگر روی $j\omega$ هستند ساده باشند.

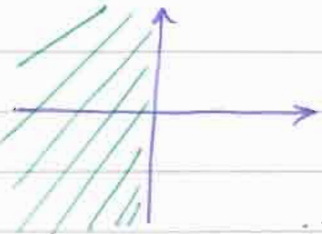
اگر $T(s)$ قطبی سمت راست نداشته باشد به ازای ورودی‌ها محدود پاسخ محدود دارد.

درحالتی که $T(s)$ دارای قطب ساده روی $j\omega$ و سمت چپ محور دارد: با فرض اینکه فرکانس ورودی، فرکانس روی $j\omega$ نباشد، پایدار است.

مثال:



سیستم پایدار است تمام قطب‌های $T(s)$ سمت چپ صفحه s است.



سیستم پایداری مرزی دارد. قطب‌های $T(s)$ سمت چپ صفحه s و قطب‌های ساده روی محور $j\omega$ است.

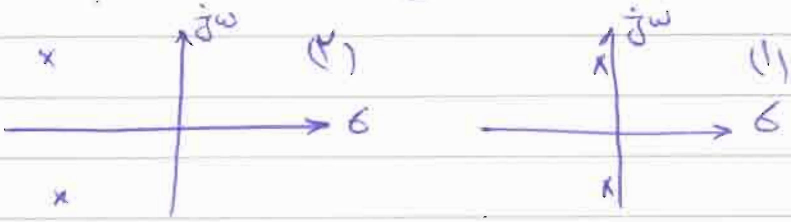
پایداری مرزی

marginaly stability

انواع پایداری: ۱- پایداری نسبی: سیستم پایدار است ولی چقدر پایدار است؟ شکل ۱

۲- پایداری مطلق: سیستم به صورت مطلق یا پایدار است یا ناپایدار.

شکل ۱ →



در اینجا می‌بینیم سیستم (۲) از سیستم (۱) پایدارتر است. یعنی به صورت نسبی یکی پایدارتر از آن یکی است. ولی این پایداری نسبی را بیان کرد. ولی هر دو سیستم به صورت مطلق پایدارند.

معیار پایداری راث - هرویتز: (Routh_Hurwitz) روشی است برای تعیین قطب های حلقه بسته (تعیین محل ریشه های یک چند جمله‌ای)

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0 = 0$$

↓

(حلقه بسته) مخرج تابع تبدیل

معادله مشخصه

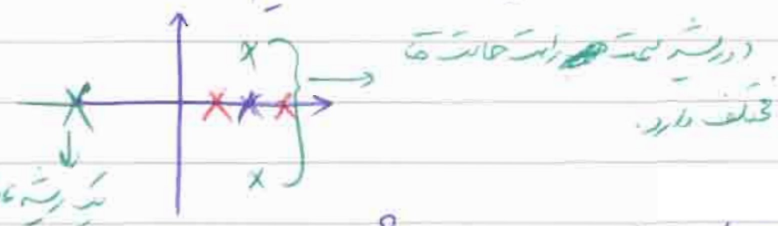
گوناگون

دترمینال ماتریس A

$|sI - A| = 0 = \Delta(s)$

} → به این روش ها می‌توان ریشه ها را پیدا کرد

نکته: به تعداد تغییر علامت در ستون اول ریشه سمت راست داریم.



شرط کافی برای ناپایداری: هرگاه یکی از ضرایب معادله مشخصه با بقیه مختلف العلامت بود یا حداقل یکی از ضرایب معادله مشخصه صفر بود ← حتماً ناپایدار است.

شرط لازم برای پایداری: همه ضرایب معادله مشخصه هم علامت باشند و هیچ یک از ضرایب صفر نباشد ← ممکن است پایدار باشد.

مثال)

$2s^4 + s^3 + 5s + 10 = 0$ ← حتماً ناپایدار، هم تغییر علامت و هم ضریب s^2 صفر است.

s^4	2	0	10
s^3	1	5	
s^2	-10	10	
s^1	6		
s^0	10		

تغییر علامت ← دو تا تغییر علامت است پس دو ریشه سمت راست

درجه معادله ← $4 - 2 = 2$ ← دو ریشه سمت چپ

$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$

s^4	2	3	10
s^3	1	5	
s^2	-7	10	
s^1	45/7		
s^0	10		

دو تغییر علامت

که دو ریشه سمت راست است RHP

دو ریشه سمت چپ LHP

حالت خاص دوم: کل درایه یک سطر صفر شود:

نکته اول: سطر تمام صفر در سطر فرد اتفاق نمی‌افتد:

$$s^7+6s^5+5s^3+7s=0$$

در این حالت در ظاهر در سطر زوج حالت صفر اتفاق ← می‌افتد ولی از s فاکتور می‌گیریم ← در سطر فرد اتفاق می‌افتد.

$$s^5+4s^4+8s^3+8s^2+7s^1+4=0$$

سوال: وقتی به سطر تمام صفر رسیدیم چه کار کنیم؟ از سطر بالایی آن معادله کمکی است، ریشه‌های معادله کمکی ریشه‌های معادله اصلی هستند.

معادله مشخصه اصلی بر معادله کمکی بخش پذیر است.

از معادله کمکی مشتق می‌گیریم.

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	
s^2	4 (s^2)	4 (s^0)	
s^1	$\cancel{0}$ 8		
s^0	4		

$4s^2+4=0$ ← $8s=0$ ضرایب مشتق معادله

$0 \to$ به سطر تمام صفر رسیدیم

کمکی را به جای سطر تمام صفر می‌گذاریم

* می‌بینیم که تغییر علامت نداریم. ریشه‌های معادله کمکی ریشه‌های معادله اصلی‌اند:

$4s^2+4=0 \to s=\pm j$ ← دو قطب روی محور $j\omega$ دارد پس در نتیجه هم حالت حدی دارد.

سیستم داریم که یک جفت قطب روی $j\omega$ دارد ← پس پایداری مرزی نوسانی دارد.

$$f_r=\frac{\omega_r}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\ Hz \qquad \frac{1}{4s^2+4}=\frac{1}{4(s^2+1)}=\mathcal{L}^{-1}\ \sin t \quad \boxed{\omega=1}$$

مثال) $s^5+3s^4-5s^3-15s^2+4s+12=0$

s^5	1	-5	4
s^4	3	-15	12 $\rightarrow P(s)=3s^4-15s^2+12=0$
s^3	$[\cancel{0}\ 12 \to 2$	$\cancel{0}\ -30 \to -5] \div 6$	$\rightarrow \frac{dP}{ds}=12s^3-30s$
s^2	$-15/2$	12	سطر سوم را ۶ تقسیم کردیم تا ساده شود.
s^1	$-$		
s^0	12		

۲ تغییر علامت داریم پس ~~[illegible]~~ دو تغییر علامت معادل از

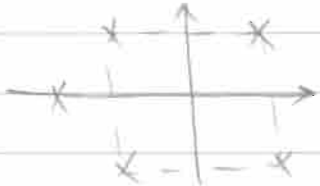
سطر صفر است، یعنی ریشه‌ها متقارن است و محور جی هم هست.

$s^4-5s+4=0 \rightarrow (s^2-1)(s^2+4)=0 \rightarrow s^2=1 \rightarrow s=\pm 1$

$s^2=4 \rightarrow s=\pm 2$

$A \mid \frac{B}{s+3=0 \rightarrow s=-3}$

سیستم ناپایدار است.



تمرین: $s^5+2s^4+4s+8=0$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

سؤال ۱۹۱: برق - ۸۸: سیستم دارای تابع تبدیل

$$H(s)=\frac{24(s-2)}{s^6+4s^5+11s^4+32s^3+40s^2+64s+48}$$

است؟ اگر سیستم حلقه باز را شده باشد به صورت زیر با فرض جمع کنیم بعد تحلیل ثبات را انجام دهیم.

پایداری کرانی: یعنی پاسخ به صفر میل به صورت کامل نمی‌رود. (اگر ریشه ۲ و ۲ عین هم است)

s^6	1	11	40	48
s^5	$\cancel{4}$ 1	$\cancel{32}$ 8	$\cancel{64}$ 16	0
① s^4	3	24	48	
s^3	0	0		
s^2				
s^1				
s^0				

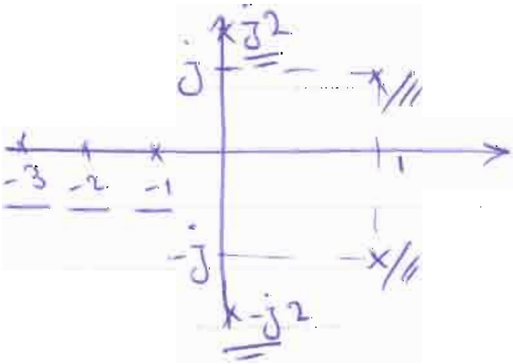
فرض هم سیستم حلقه بسته است

اگر ستونی صفر، پایداری کرانی = ناپایدار

$(s^2+4)^{②} \rightarrow s^2=-4 \rightarrow s=\pm j4$

تکرار قطب ها

① یعنی $\rightarrow 3s^4+24s^2+48 \rightarrow s^4+8s^2+16=0$



$\rightsquigarrow (s+1)(s+2)(s+3)(s^2+4)(s^2-2s+2)$

$$s^6+s^5+3s^4+3s^3+3s^2+2s+1=0$$

(۴)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Delta(s) = s^5 + 4s^3 + 3\cancel{6}s = 0 \Rightarrow s(s^4 + 4s^2 + 6) = 0 \quad (s^2+1)(s^2+3)$$

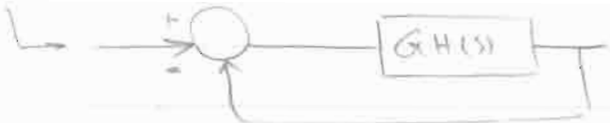
$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 4 & 3 \\ s^4 & 0 & 0 & 0 \\ s^3 & & & \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array} \qquad \text{روش اول} \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4 & 3 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

روش دیگر این است که معادله را در (s+1) ضرب کنیم سپس حل کنیم در دارکه خواسته‌مان باشه
که s+1 را اضافه کردیم و چند تا قطب ها بیاوریم

راه اول: از s فاکتور گرفتیم تا گرفتیم قطب روی jω آن چه مشخص شد.

سوال 281 : اتوماسیون ۹۰ :

$$GH(s) = \frac{16}{s(s+a)^2}$$

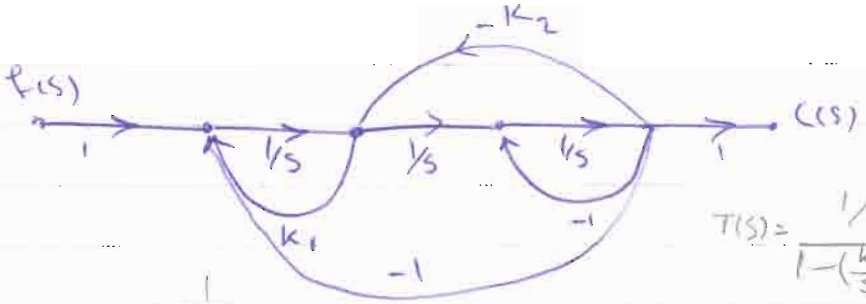


$$\rightarrow \Delta(s) = s(s+a)^2 + 16$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برق 86 : سؤال 80 :



$$T(s)=\frac{1/s^3}{1-\left(\frac{k_1}{s}-\frac{1}{s}+\frac{k_2}{s^2}-\frac{1}{s^3}\right)+\frac{k_1}{s}\times\frac{-1}{s}}$$

$$\rightarrow T(S)=\frac{\frac{1}{s^3}}{1-\frac{k_1}{s}+\frac{1}{s}-\frac{k_2}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\frac{k_1}{s^2}}=\frac{1}{s^3+(1-k_1)s^2-(k_1+k_2)s+1}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -(k_1+k_2) \\ s^2 & 1-k_1 & 1 \\ s^1 & \frac{-(1-k_1)(k_1+k_2)-1}{1-k_1}=0 & \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

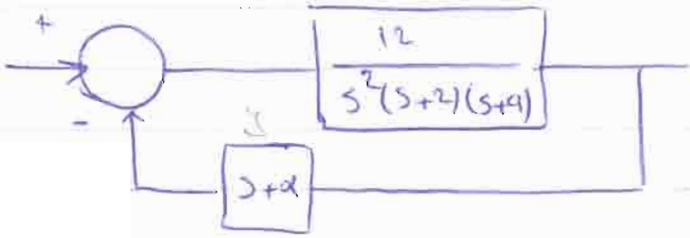
شرط نوسان

معادله ① : $(1-k_1)s^2+1=0 \rightarrow s=\pm\frac{1}{\sqrt{1-k_1}}j$

$\rightarrow -(1-k_1)(k_1+k_2)-1=0$

$\Rightarrow k_1+k_2=\frac{-1}{1-k_1}$

اوگاتا سیوان 89 سؤال 252 :



$$T(s)=\frac{12}{s^2(s+2)(s+4)+(s+\alpha)12}$$

هنگامی نوسان، ریشه‌های معادلات مختلط است.

باید α و k را طوری بدست آوریم که نوسانی شود.

PaPCO

پاسخ سوال 273 : فیدبک مثبت است ←

$$T_p(s)=\frac{k_1}{s^2+4-k_1(s-2)}$$

← تابع تبدیل حلقه بسته

برای سیستم درجه دوم شرط لازم پایداری کافی هم هست.

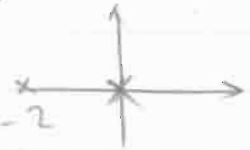
$$\to T_p(s)=\frac{k_1}{s^2-k_1 s+2k_1+4}$$

s^2	1	$4+2k_1$
s^1	$-k_1=0$ ق ق غ	
s^0	$4+2k_1=0$ ق ق	

اگر $k_1=0$ باشد plant از بین می‌رود پس $-k_1=0$ جواب مورد نظر نیست.

$$4+2k_1=0\to \boxed{k_1=-2}$$

$$T_p(s)=\frac{-2}{s^2+2s}\to$$



مرز پایداری است.

نکته: جدول راث مقابل زیر است به چه مقدار k سیستم نوسانی است فرکانس نوسان چیست؟

s^3	a	b	c
s^2	1	$8-k$	
s^1	$k-10\to k=10$		
s^0	x		

$$\to s^2+8-10=0\to s^2=2$$

حقیقی می‌شود بنابراین هیچ نوسانی نمی‌شود

برای اینکه نوسان کند باید $8+k$ داشته باشیم

پاسخ سوال 85:

$$T(s)=\frac{\frac{1}{(s+1)(s+p)}}{1+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+p)}+\frac{1}{s+p}}=\frac{1}{(s+1)(s+p)+(s+p)+1+(s+1)}$$

اشتراک

$$T(s)=\frac{1}{s^2+\underbrace{(p+3)}_{>0}s+\underbrace{2p+2}_{>0}}\Rightarrow p>-3,\ p>-1\to p>-3\cap p>-1$$

$$=p>-1$$

PaPCO

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

صفر در مبدأ یعنی مشتق‌گیر

$$x(t) \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow x'(t)$$

اپراتور مشتق‌گیر

$$x(s) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow S X(s)$$

5) انتگرال‌گیری در حوزه زمان:

$$\int_0^t x(\tau)\, d\tau \longrightarrow \frac{1}{s} x(s)$$

$$\sim \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n \text{ بار}} x(\tau)\, dt = \frac{1}{s^n} X(s)$$

$$x(s) \longrightarrow \boxed{1/s} \longrightarrow \frac{1}{s} x(s)$$

6) مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری در حوزه لاپلاس:

$$t f(t) \longrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$t^n f(t) \longrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$\frac{f(t)}{t} \longrightarrow \int_s^\infty F(u)\, du$$

7) تغییر مقیاس:

$$F(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} F(s/a)$$

8) کانولوشن در حوزه زمان:

$$L\{f_1(t) * f_2(t)\} \longrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$$

9) ضرب در حوزه زمان:

$$L\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} \longrightarrow F_1(s) * F_2(s)$$

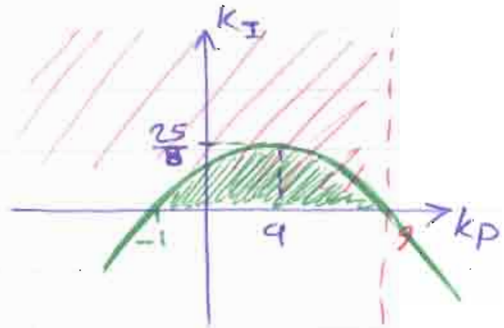
PAPCO

s^4	1	5	$2k_I$
s^3	4	$2+k_p$	
s^2	$\dfrac{20-2-2k_p}{4} > 0$	$2k_I$	$\rightarrow k_p < 9$
s^1	$X > 0$		
s^0	$2k_I > 0 \rightarrow k_I > 0$		

$$X = \frac{\dfrac{(2+k_p)(20-2-2k_p)}{4} - 8k_I}{\dfrac{20-2-k_p}{4}} \xrightarrow{\text{شرح}\, >0} \frac{(20-2-2k_p)(2+k_p)}{4} > 8k_I$$

$$\rightarrow (10-1-k_p)(1+k_p) > 8k_I$$

$$\rightarrow 10+10k_p-(1+k_p^2+2k_p) > 8k_I \rightarrow k_I < \frac{1}{8}(-k_p^2+8k_p+9)$$



$k_I > 0$

$k_p < 9$

$$\max = \frac{-\Delta}{4a} \qquad \text{طول نقطه max} = \frac{-b}{2a}$$

قطب در مبدأ ← مرز پایداری بدون نوسان $k_I = 0$

$k_p = 0$ ← یعنی مرز پایداری با نوسان یعنی $X = 0$

Subject:

Year. Month. Date.

$$G(s) = \frac{3(s+a)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

در این سیستم با تغییر صفرها در حلقه باز محل سیستم

حلقه بسته ناپایدار شود. برای پایداری باید در روت لوکاس صفر به سمت راست بروند

$$T(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)(s+3) + 3(s+a)}$$

به ازای جابه‌جایی صفر مکان هندسی

ریشه‌ها جابه‌جا می‌شود.

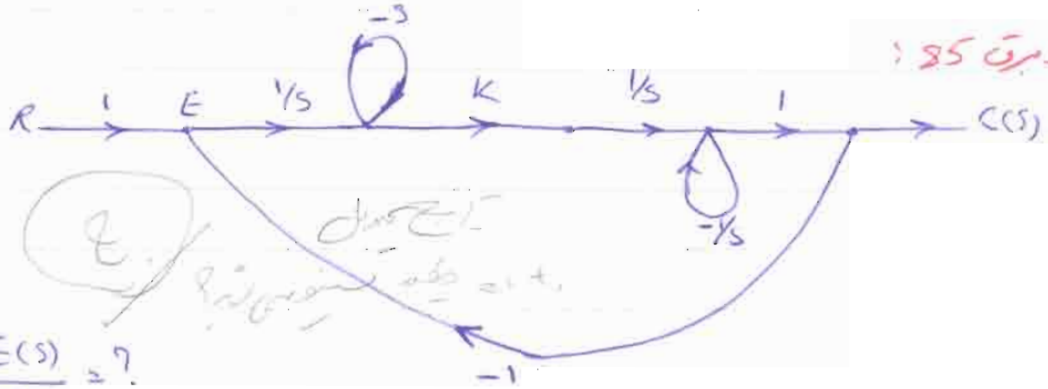
$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 14s + 6 + 3a$$

s^3	1	14
s^2	6	$6+3a$
s^1	$78-3a>0 \rightarrow a<26$	
s^0	$6+3a>0 \rightarrow a>-2$	

$\longrightarrow -2<a<26 \rightarrow$ تمرین ۹

روت لوکاس: محل قطب‌های حلقه بسته، وقتی می‌گوییم سیستم پایدار یعنی روت لوکاس سمت چپ

سؤال ۵۸ برق ۸۵:



$$\frac{E(s)}{R(s)} = ?$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1\left[1-\left(-s-\frac{1}{s}\right)+1\right]}{1-\left(-\frac{1}{s}-s-\frac{k}{s^2}\right)+\left(-s+\frac{-1}{s}\right)} = \frac{2+s+\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}+s+\frac{k}{s^2}+1} = \frac{s^3+2s^2+1}{s^3+2s^2+s+k}$$

PAPCO

$\Delta(s) = Ts^2 + 2s + 4$ $\quad \forall\, T>0$ stable

به ازای هر T سیستم پایدار است.

تمرین → $e^{-Ts} = \dfrac{1-\left(\frac{Ts}{2}\right)+\left(\frac{Ts^2}{8}\right)}{1+\frac{Ts}{2}+\frac{(Ts)^2}{8}}$

این روش راه مناسبی برای بدست آوردن پایداری نیست چون روش تقریبی است.

به این روش تقریب پاده می‌گویند که از روش روث هرویتز (R_H) بدست می‌آید

بحث پایداری نسبی: مفهوم پایداری این است که سیستم حقیقتا پایدار است یا ناپایدار یا در مقایسه بین دو سیستم کدام سیستم پایدارتر است. مفهوم عملی‌تر آن فاصله (دوری و نزدیکی) قطب با محور $j\omega$ است:

در اینجا محور $j\omega$ جابه‌جا می‌شود نه نمودارها ←
جابه‌جایی نمودار به $s-\alpha$ خواهد بود و روث می‌زنیم

$s \to s-\alpha \to$ راث

$D(s) \to D(s-\alpha)$

اگر بخواهیم k را در سیستم چنان بیابیم که $s=-\alpha \pm j\beta$ شود بنابراین $D(s) \to (s-\alpha)$

راث می‌زنیم در سطر صفر رخ دهد. بنابراین حد قسمت حقیقی قطب را بدهد و حیطه زمان نشست

ایده حل سؤال پایداری نسبی است.

→ $k_1 < t_s < k_2$

PaPCO

محاسبه ریشه nام یک عدد مختلط:

$$z^n = z_0 = r_0 e^{j\theta} \rightarrow z = \sqrt[n]{r_0}\, e^{j\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$z^4 = -4 = 4e^{j\pi}$$

$$\rightarrow z = \sqrt[4]{4}\, e^{j\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)} \quad k = 0, \ldots, 3$$

$$z_1 = \sqrt[4]{4}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{4}\, e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{4}\, e^{j\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_4 = \sqrt[4]{4}\, e^{j\frac{7\pi}{4}}$$

$$x^4 = 4 \rightarrow x^2 = +2 \,,\; x = \pm\sqrt{2}$$

فضای حالت: (state space)

فضای حالت در حوزه زمان بررسی می‌شود.

حالت (stat): مجموعه‌ای از حداقل متغیرهای مستقل (x... داده شده) $\{x_i(t)\}$ که اگر در $t = t_0$ داشته باشیم و ورودی را هم در $t \geq t_0$ بدانیم $\longrightarrow$ خروجی $t \geq t_0$ $\forall t$ به طور یکتا معلوم خواهد بود.

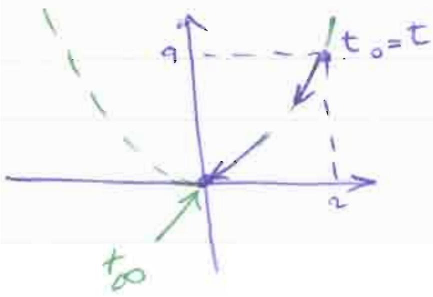
بردار حالت:

فضای حالت:

$\Rightarrow$ توضیح در صفحه بعد

معادلات حالت: معادلات دینامیکی xها برحسب زمان معادلات حالت است. دینامیک یعنی مشتق.

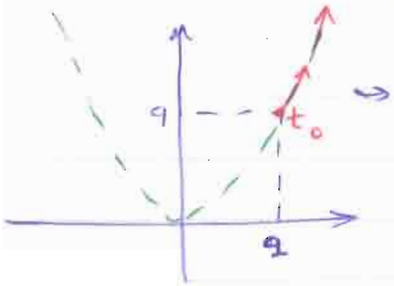
معادله مسیر حالت: trajectory



در t_∞ حول stat ها در مبدا تراکم دارند

پایدار است.

$$x_1(t) = e^{2t} u(t) \ , \quad x_2(t) = e^{4t} u(t) \ , \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



$\Rightarrow$ از مبدا دور می‌شود پس ناپایدار است.

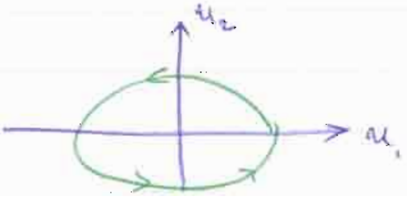
$$\lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0 \longrightarrow \text{پایدار}$$

$$\lim_{T \to \infty} e^{t} = \infty \longrightarrow \text{ناپایدار}$$

در معادله حالت اگر به مبدا نزدیک شویم سیستم پایدار است اگر از مبدا دور شویم سیستم ناپایدار است.

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= 3\sin(t) \\ x_2(t) &= 4\cos(t) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2 = 1$$

$\Leftarrow$ معادله بیضی است.



سیستمی که قطب روی $j\omega$ دارد دارای شکل بسته در trajectory است یعنی نه به صفر میل می‌کند و نه به بی‌نهایت. (وجود یک قطب روی $j\omega$ نشان یک پایداری مرزی نشان دهنده

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

TF → تابع تبدیل   SS → state space → معادله حالت

ODE → معادله دیفرانسیل   SD → state Digram → نمایش حالت

حل معادلات حالت: (بدون ورودی ← حالت صفر):

یادآوری:

$\dot{X} = Ax$ → x بردار است، A ماتریس

مثال)

$\dot{x} = ax \rightarrow x(t) = x(0)e^{at}$

$\dot{x} = ax \longrightarrow sX(s) - x(0) = aX(s) \rightarrow (s-a)x(s) = x(0)$

$x(s) = \frac{x(0)}{s-a}$

$\rightarrow x(t) = x(0)e^{at}$ ①

$\dot{X} = AX \longrightarrow \underset{\text{اسکالر}}{s}X(s) - X(0) = \underset{\text{ماتریس}}{A}X(s)$

$\longrightarrow \underbrace{(sI - A)}_{\text{را بنویسیم}}X(s) = X(0) \xrightarrow{\text{ماتریس ر تعریف می‌بود}} X(s) = (sI-A)^{-1}X(0)$

را از جنس S و A بنویسیم

$\longrightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}X(0) \longrightarrow X(t) = e^{At}X(0) = \varphi(t)X(0)$

e^{At}

ماتریس انتقال حالت
" عبور "
" گذر "

وقتی با ① مقایسه می‌کنیم می‌فهمیم
این عبارت همان e^{at} است.
یعنی e به توان ماتریس حالت.

PAPCO

Subject: بدست آوردن شرایط اولیه از روی $\varphi(t)$

Year. Month. Date.

خاصیت چهارم:

$$\underbrace{e^{At}}_{\downarrow} \cdot \underbrace{e^{-At}}_{\downarrow} = I$$

$$\varphi(t) \cdot \varphi(-t) = I \longrightarrow \varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$$

معکوس

φ^{-1} وقتی $\varphi(t)$ را داریم و $x(t)$ هم داریم

$x(0) = x(t) \times \varphi^{-1}$ را بدست می‌آوریم

$$\begin{tikzcd} x(0) \arrow[r, bend left, "\times \varphi(t)"] & x(t) \arrow[l, bend left, "\varphi^{-1}(t)"] \end{tikzcd}$$

خاصیت پنجم:

$$\varphi^{k}(t) = \varphi(kt)$$

$$e^{At} \cdot e^{At} \cdots e^{At} = e^{Akt} = \varphi(kt)$$

خاصیت ششم:

$$\varphi(t_2 - t_1) \cdot \varphi(t_1 - t_0) = \varphi(t_2 - t_0)$$

$$e^{A(t_2 - t_1)} e^{A(t_1 - t_0)} = e^{A(t_2 - t_0)}$$

$$\begin{tikzcd} t_0 \arrow[r, bend left] & t_1 \arrow[r, bend left] & t_2 \end{tikzcd}$$

به جای اینکه از t_0 به t_1 بریم بعد به t_2 به صورت از t_0 به t_2 بریم.

سراسری 85: سوال 61: کدام گزینه صحیح است؟

$$\varphi(t) + \varphi^{-1}(t) = \varphi(-t) + \varphi^{-1}(-t)$$

$$e^{At} + e^{-At} = e^{-At} + e^{At}$$

صحیح است. ✓

$$\varphi^{-1}(+5t) = \varphi(-2t)\,\varphi(-3t) \quad ✓$$

$$e^{-5t} = e^{-5t}$$

$$\varphi(3t)\,\varphi(4t) = \varphi(2t)\,\varphi(5t)$$

$$✓ \quad e^{7t} = e^{7t}$$

PAPCO

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \text{diagonal} \ \text{یا} \ \text{diag}(-1,-3)$$

$$\rightarrow \varphi(s) = (sI - A)^{-1} \sim sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\sim (sI-A)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+3)}}_{\text{دترمینان}} \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$\sim \varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

مدلهای سیستم

۱) فضای حالت: (state space) (SS): در این چهار مبحث را باید بررسی کنیم:

۲) معادله دیفرانسیل مرتبه n ام: (ODE)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m r^{(m)} + \dots b_1 r^{(1)} + b_0 r$$

مرتبه: بیشترین مرتبه مشتق خروجی

۳) تابع تبدیل (TF):

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) R(s)$$

لاپلاس خروجی →

〃 〃 ورودی →

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

۴) دیاگرام حالت (SD) state Diagram

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{tikzcd} ODE \arrow[r, bend left] \arrow[d, bend right, "L"'] & SS \arrow[l, bend left] \\ TF \arrow[u, bend right, "L^{-1}"'] & SD \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} SS \arrow[r] \arrow[dr] & ODE \\ & TF \end{tikzcd}$$

محاسبه تابع تبدیل از روی فضای حالت:

یادآوری: $\dot{x} = Ax \rightarrow x(t) = \underbrace{\overset{e^{At}}{\varphi(t)}}_{\text{ماتریس انتقال حالت}} x(0)$

$$SS \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow{L} S X(S) - X(0) = A X(S) + B U(S) \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$(SI - A) X(S) = X(0) + B U(S)$$

خروجی / ورودی $= \dfrac{Y(S)}{U(S)} = T(S)$

$$(\ast)\quad X(S) = \underbrace{(SI - A)^{-1}}_{\text{ماتریس اساسی}} X(0) + (SI - A)^{-1} \underbrace{BU(S)}_{\text{لاپلاس ورودی}}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} x(t) = \overbrace{\varphi(t)\, x(0)}^{\text{ورودی صفر (ZI)}} + \underbrace{\int_0^t \varphi(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau}_{\text{حالت صفر (ZS)}}$$

تعریف $\varphi(t) * u(t)$ یا $\int_0^t \varphi(\tau) B u(t-\tau)\, d\tau$ ← تعریف‌های مختلف کانولوشن

$\rightarrow y(t) = C x(t) + D u(t)$

چون در اینجا مشتق نداشتیم، بدست آوردن لاپلاس $u(t)$ سخت بود. بعد از اینکه $u(t)$ بدست آمد می‌توان $y(t)$ را محاسبه کرد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$N = [n_{ij}]$ $\qquad$ $n_{ij} = (-1)^{i+j} \left| \quad \right|$

ماتریسی که از حذف ستون j ام و سطر i ام بدست می‌آید.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D \qquad D = \lim_{s \to \infty} H(s)$$

$$= \frac{C\,\mathrm{adj}(SI - A)B}{|SI - A|} + D$$

$$= \frac{C\,\mathrm{adj}(SI - A)B + D|SI - A|}{|SI - A|} \quad (*)$$

(*) یعنی مخرج تابع تبدیل حلقه بسته دترمینال $SI - A$ یعنی

دترمینال ماتریس دارد است. یعنی مخرج تابع تبدیل حلقه بسته از روی ماتریس A

بدست می‌آید:

$$\Delta(s) = |SI - A|$$

از دیدگاه ریاضی ریشه های دترمینال را $\Delta(s) = |SI - A| = 0 \rightarrow$

مقادیر ویژه ماتریس A ($eig(A)$) می‌گویند که در برق آن قطب های سیستم می‌گویند.

ولی این درست نیست. یعنی هر مقدار ویژه ای الزاماً قطب نیست ولی هر قطبی قطعاً مقدار

ویژه است. مثلاً ممکن است یک مقدار ویژه در دترمینال A هست که در صورت هم ممکن است

این مقدار ویژه معادل حذف شده که از صورت و مخرج ساده شده است. یعنی

PAPCO

$$F_3(s) = \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\text{راه اول}} f_3(t) = \sin t \, u(t) \rightarrow f_3(0^+) = 0$$

$$\rightarrow f_3(\infty) = \text{کراندار و نامعلوم}$$

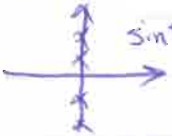
$$\xrightarrow{\text{راه دوم}} f_3(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF_3(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s}{s^2+1} = 0$$

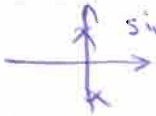
اگر $F(s)$ قطبی روی محور $j\omega$ داشته باشد $F.V.T$ صادق نیست.

$f_{ss} \rightarrow \infty$: قطب تکراری $j\omega$

$f_{ss} \rightarrow$ محدود و نامعلوم : قطب روی $j\omega$ ساده

(مرز پایداری)





در این حالت پاسخ نوسانی است

در این حالت پاسخ نوسانی است

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = F_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} \xrightarrow{\text{راه اول}} f(t) = (1-e^{-t})u(t) \rightarrow f(0^+) = 0$$

$$\rightarrow f(\infty) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{راه دوم}} \lim_{s \to \infty} sF(s) = f(\infty) = \lim_{s \to \infty} \frac{s}{s(s+1)} = 0$$

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = f(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s(s+1)} = 1$$

اگر قطب روی محور $j\omega$ نداشته باشد و فقط در مبدأ قطب ساده داشته باشد قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی صادق است. (مرز پایداری هم باشد، است بدون نوسان)

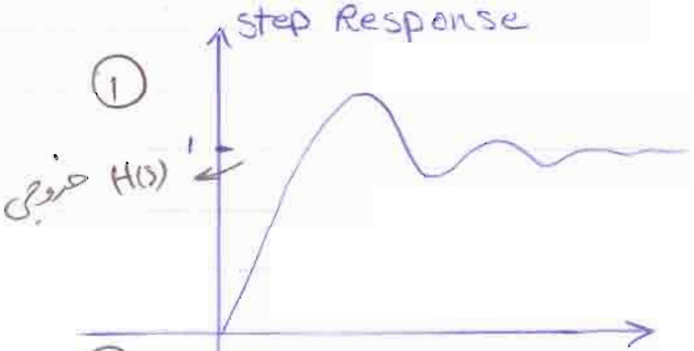
$$adj(A) = (-1)^{i+j} \left| \quad \right| = N^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow N = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow adj(A) = \frac{1}{ab-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4s+3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

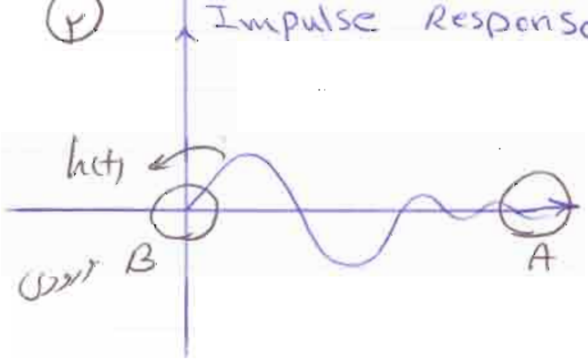
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+1}{s^2+4s+3} = |sI-A|$$

‎-3 و ‎-1 مقادیر ویژه هستند:



سوال 268 ، برگه 9 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$



$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $d = 0$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $d = 0$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $d = 1$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $d = 1$

چون سیستم نوسانی داریم پس می‌فهمیم که قطب مختلط و سمت چپ قرار دارد.

PAPCO

محاسبه ی فضای حالت از روی معادله دیفرانسیل یا تابع تبدیل: ؟ (تحقیق)

وقتی می خواهیم فضای حالت بدست آوریم A، B، C و D را بدست می آوریم.

پس در این قسمت هدف محاسبه ماتریس های A، B، C، D است.

برای هر تابع تبدیل و یا هر معادله دیفرانسیل بی نهایت A، B، C و D وجود دارد.

به بیان دیگر ماتریس های A، B، C، D فضای حالت یک سیستم یکتا نیست.

باید T طوری تعریف شود که T معکوس پذیر باشد.

اثبات:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[\dot{x} = T\dot{z}]{x = Tz} \begin{cases} ① \; T\dot{z} = ATz + Bu \\ ② \; y = CTz + Du \end{cases}$$

$$x = Tz \rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + 2z_2 \\ x_2 = 3z_1 - z_2 \end{cases}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{①} \dot{z} = \underbrace{T^{-1}AT}_{A_{new}} z + \underbrace{T^{-1}B}_{B_{new}} u$$

$$\xrightarrow{②} y = \underbrace{CT}_{C_{new}} z + Du$$

واضح بود که D نباید عوض می شد چون D ماتریس انتقال است و هیچ ربطی به stat ها ندارد.

$$C(SI-A)^{-1}B + D = C_{new}(SI-A_{new})^{-1}B_{new} + D_{new}$$

$$|SI-A| = |SI-A_{new}|$$

PaPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در این نوع تحقق همیشه $C = [1 \; 0 \; 0]$ است چون خروجی را state اول می‌گیریم

و ماتریس A سطر آخر آن ضرایب معادله اصلی را در $\underline{\underline{1}}$ ضرب می‌شود در عکس

نوشته می‌شود. $\xleftarrow{x-1}$

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 2r(t)$$

در این نوع تحقق کانونیکال کنترل پذیر می‌گویند controlable canunicled form

متغیرهای فاز یعنی خروجی مشتقات آن تا یکی بعد از بزرگترین مرتبه، دارای

متغیرهای فاز y ، y' ، y'' است.

تحقق ۲) سری در حالتی که بصورت عدد باشد.

حال یک تحقق دیگری درست می‌کنیم A ، B و C را به همین صورت بدست آوریم:

$A_{new} = A^T$ $\qquad$ $B_{new} = C^T$ $\qquad$ $C_{new} = B^T \rightarrow$ کانونیکال رویت پذیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \; 0 \; 1] x$$

باید اثبات کنیم $\rightarrow$ $B^T(SI - A^T)^{-1} C^T = (C(SI - A)^{-1} B)^T$

اسم دیگر ورژن کانونیکال اولین state
خروجی

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) سیستم improper است D داریم

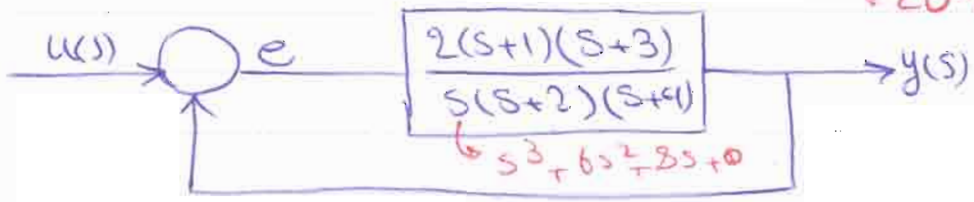
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s^2+2s+5}{s^2+4s+3}$$

$$= 2 + \frac{-6s-1}{s^2+4s+3}$$

$\underline{D=2}$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1 & -6\end{bmatrix},\quad D=2$$

سؤال 264 :



$\underline{e}$ ← تابع تبدیل حلقه باز است :

$$x = Ax + B\underline{e} \quad \text{حلقه باز می‌خواد}$$

$$y = Cx + De$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -8 & -6\end{bmatrix}$$

$$x = Ax + B\underline{u} \quad \text{حلقه بسته می‌خواد}$$

$$y = Cx + Du$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)+2(s+1)(s+3)} = \frac{2s^2+8s+6}{s^3+8s^2+16s+6}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -16 & -8\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}6 & 8 & 2\end{bmatrix}$$

$$D=0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s+1}{s^2+4s+3}$$

حالتها به صورت s داریم ;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

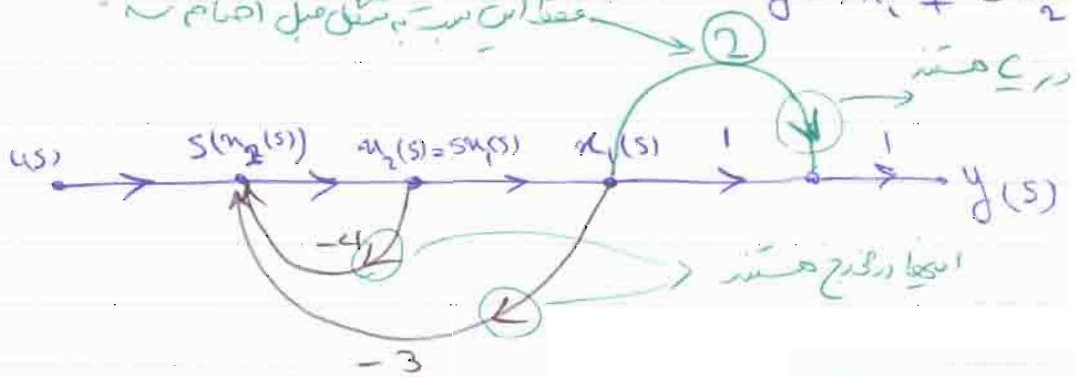
$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + 1u$

$y = [1 \quad 2]\, x$

$y = 1x_1 + 2x_2$

فقط این شاخه به شکل قبل اضافه شد



کسکید سری یا متوالی:

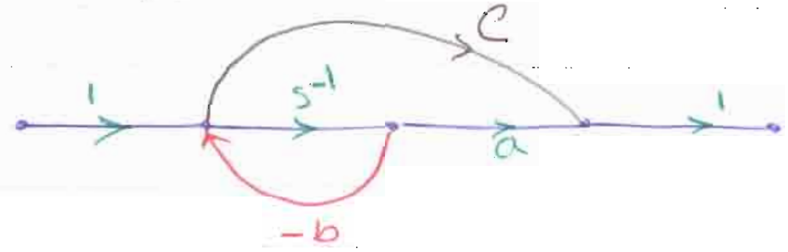
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{cs+a}{s+b} \quad ①$$

$$\rightarrow \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s+1}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{2(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{2s+1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3}$$

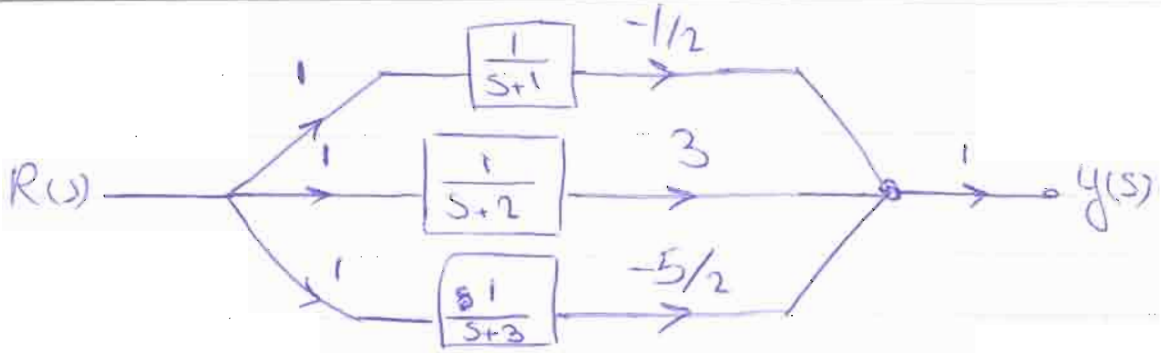
✱ → شکل در بالای صفحه بعد

① →

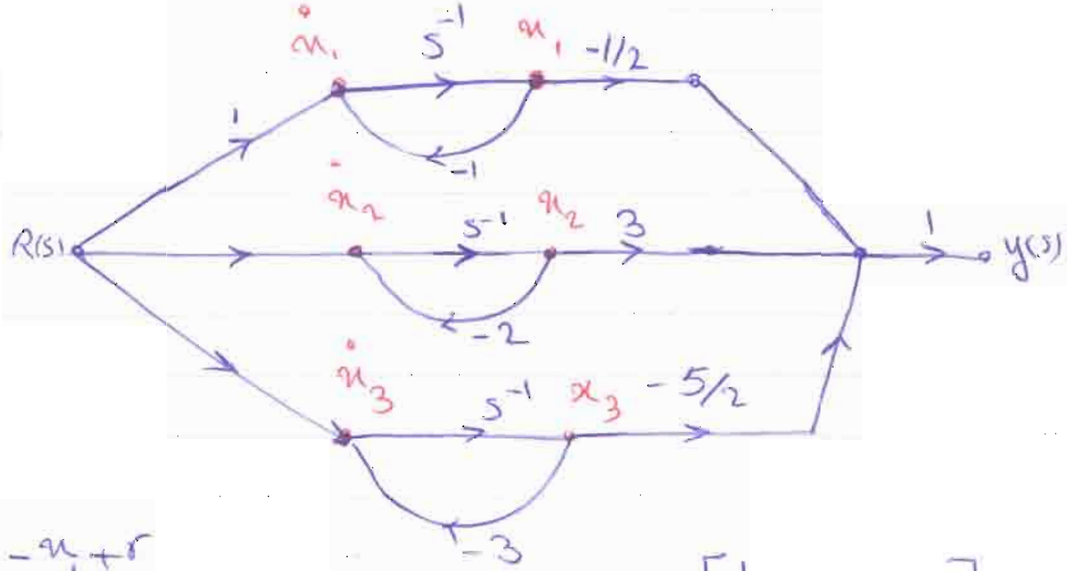


PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



sfg →



$$\dot{x}_1 = -x_1 + r$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + r$$

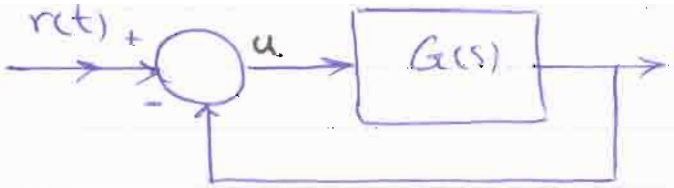
$$\dot{x}_3 = -3x_3 + r$$

$$y = \frac{-1}{2}x_1 + 3x_2 - \frac{5}{2}x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1/2 & 3 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$



سؤال 133، برق _ 88 :

با کدام تابع تبدیل G(s) تحقق فضای حالت کمینه است؟

PAPCO

Subject:
Year: ۹۰ Month: ۹ Date: ۴

نکته ۱: یعنی حالت x_2 در خروجی مشاهده نمی‌شود. که این حالت وقتی قطب (+) داریم

پیدا می‌شود. تا وقتی که پایدار باشد مهم نیست. (یعنی 2 به جای 2-)

نکته ۲: اگر سیستم کنترل پذیر باشد می‌توانیم قطب‌های آن را هر جا که می‌خواهیم ببریم...

جلسه هشتم

در سیستم زیر مقادیر ویژه، قطب‌ها و صفرها را بیابید. $\frac{y(s)}{U(s)} = ?$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\frac{y(s)}{U(s)} = \frac{0s^2 + s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

معمولاً مقادیر ویژه را همواره از روش $|sI - A| = 0$ بدست می‌آوریم.

$$D(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$$

$$D(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$
$$= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

مقادیر ویژه $-1, -2, -3$

$$\frac{y(s)}{U(s)} = \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+3)}$$

$s+1$ مقادیر ویژه دارد ولی قطب نیست چون با صورت ساده می‌شود.

$\rightarrow x_2 = -x_1$ یکی هستند

$-3x_1 - 4x_2 = -x_2$

$\rightarrow V_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} \overset{\text{مثلاً}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

نکته:

اگر ... بردار ویژه باشد هر مضرب عددی از x بردار ویژه است.

$\lambda_2 = -3$

$\longrightarrow Ax = \lambda x \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow x_2 = -3x_1$

$\longrightarrow V_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} c \\ -3c \end{bmatrix} \overset{\text{مثلاً}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow -3x_1 - 4x_2 = -3x_2$

نکات:

A های فرم کانونیکال کنترل پذیر است. اگر A به این فرم یعنی کانونیکال کنترل پذیر باشد

بردار ویژه می‌شود $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$ ... این فقط برای زمانی است

که A به فرم کانونیکال کنترل پذیر باشد.

اگر A به فرم کانونیکال کنترل پذیر از مرتبه ۳ باشد:

$V_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \end{bmatrix}$

$V_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \end{bmatrix}$ $\quad V_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_3^2 \end{bmatrix}$

مثال) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$

$$T = M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \lambda = -1, -3$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

$$\rightarrow T^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ T^{-1}B = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\ CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2

اگر برای ماتریس مدال (T) مقدار $T^{-1}AT$ را محاسبه کنیم ماتریسی بدست می‌آید

که قطر اصلی آن مقادیر ویژه است.

(1)

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + u \end{cases} \rightarrow$$ ورودی روی هم x_1 و x_2 تاثیر دارد

$$y = x_1 + x_2$$

(۲)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + \frac{1}{2}u \\ \dot{z}_2 = -3z_2 - \frac{1}{2}u \end{cases} \rightarrow$$ وقتی سیستم قطری می‌شود stat ها فقط به

$$y = -2z_2$$

خودشان ربط دارند. بنابراین اسم دیگر

قطری سازی دکوپله سازی می‌گویند چون هر کدام فقط به خودشان مربوطند

هر دو سیستم ۱ و ۲ با هم یکی هستند ولی نمایش‌ها متفاوت است در سیستم ۱ خروجی

به هر دو stat وابسته است ولی در سیستم دوم خروجی فقط به یک stat مربوط می‌شود (یک

(1)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+3}$$ (رویت پذیری)

یک قطب حذف شد

Year / Month Date ( )

مفهوم کنترل پذیری: (اول کنترل پذیر را بخوان) ۱.

(صفحه بعد نوشتم)

مفهوم رویت پذیری: سیستمی رویت پذیر است که همه stat های آن قابل رویت باشد: سیستم را رویت پذیر گویند که با مشاهده خروجی بتوان تمام حالت‌ها را پیدا کرد. این یعنی تمام حالت در ساختن خروجی دخیل هستند.

$$\varphi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$ ← ماتریس رویت پذیری ← به جای دلیل کنترل پذیری ماتریس رویت پذیری هم فرض است.

SISO در → if $|\varphi_o| \neq 0$ → observable

در مثال فوق → $\varphi_o = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow C \\ \leftarrow CA \end{array} \rightarrow |\varphi_o| = 0$ Un ab.

← رویت ناپذیر است.

با این روش گفته شده فقط می‌توان رویت پذیری و کنترل پذیری را تشخیص داد ولی نمی‌توان گفت کدام حالت کنترل ناپذیر یا رویت ناپذیر است.

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} ; \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$ در فرم قطری:

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ مقادیر ویژه

$$\rightarrow T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad CT = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_n]$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1c_1}{s-\lambda_1} + \frac{b_2c_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{b_nc_n}{s-\lambda_n}$$

system is C iff $b_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

← کنترل پذیر

system is O iff $c_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

← رویت پذیر